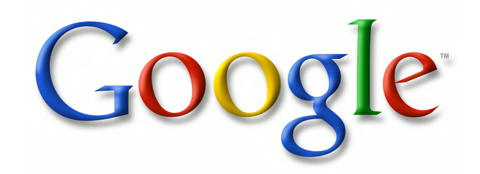




M. ABRAHAM

THEORIE DER ELEKTRIZITÄT

II

in München u. L. Prandtl in Göttingen.

C. Molekularphysik.

†6. Chemische Atomistik: **F. W. Hinrichsen** in Aachen und **L. Mamlock** in Dresden.
7. Kristallographie.
7a) Kristall-Berechnung u. Zeichnung: **Th. Liebisch** in Göttingen.
7b) Symmetrie- und Strukturtheorien: **A. Schoenflies** und **O. Mügge** in Königsberg i. Pr.
8. Kinetische Theorie d. Materie: **L. Boltzmann** in Wien.
9. Kapillarität u. Kohäsion: **H. Minkowski** in Göttingen.
10. Nähere, insbesondere graph. Theorie der Zustandsgleichung f. spezielle Stoffe: **H. Kammerlingh-Onnes** in Leiden.
11. Physikalische und Elektrochemie: **J. H. van't Hoff** in Berlin.

II. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band V, Teil II.

D. Elektrizität und Optik.

Physikalische Grundlegung der Elektrizitätslehre.

*12. Standpunkt der Fernwirkung, die Elementargesetze: **R. Reiff** in Stuttgart und **A. Sommerfeld** in Aachen.

Mathemat. Spezialausführungen zur Elektrizitätslehre.

18. Elektrostatik und Magnetostatik: **R. Gans** in Tübingen.
19. Beziehungen zwischen Elektrizität und elastischer Deformation: **F. Pockels** in Heidelberg.
20. Stationäre und langsam veränderliche Felder: **Th. Descoudres** in Leipzig.
21. Beziehungen der elektrischen Strömung zu Wärme u. Magnetismus: **H. Diesselhorst** in Berlin.
†22. Rasch veränderl. Felder: **M. Abraham** in Göttingen.
23. Elektrotechnik: **N. N.**

Mathemat. Spezialausführungen zur Optik.

24. Strahlenoptik u. optische Instrumente: **S. Finsterwalder** in München.
25. Wellenoptik (Interferenz u. Beugung): **N. N.**
26. Kristalloptik: **F. Pockels** i. Heidelberg.

E. Schlußwort.

27. Allgemeine physikalische Anschauungen und Methoden: **A. Sommerfeld** in Aachen und **G. Mie** in Greifswald.

☛ Bisher erschienen:

Teil I Heft 1 (1—3). [160 S.] 1903. n. ℳ 4.80. | Teil II Heft 1 (12—14). [200 S.] 1903. n. ℳ 8.—

Mechanik. Herausgegeben von F. Klein und C. H. Müller in Göttingen. A. u. d. T.: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. IV. Band. gr. 8. geh.

* erschienen, † unter der Presse.

I. Teil.

Vorwort zu Bd. IV von **F. Klein** in Göttingen.
Inhaltsverzeichnis von Bd. IV, Teil I.

A. Grundlegung der Mechanik.

*1. Die Prinzipien der rationellen Mechanik: **A. Voß** in München.

B. Mechanik der Punkte und starren Systeme.

I. Behandlung elementarer Fragen in geometrischer Form.

*2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers: **E. Timerding** in Straßburg.
*3. Kinematik: **A. Schoenflies** in Königsberg, mit einem Zusatze von **M. Grübler** in Dresden.
*4. Die Geometrie der Massen: **G. Jung** in Mailand.
*5. Graphische Statik: **L. Henneberg** in Darmstadt.
6. Die elementare Kinetik: **J. Petersen** in Kopenhagen u. **P. Stäckel** in Hannover.

II. Anwendungen, mit Berücksichtigung der störenden Einflüsse.

*7. Die Mechanik der einfachsten physikal. Apparate und Versuchsanordnungen: **Ph. Furtwängler** in Bonn.



*8. Physiologische Mechanik: **O. Fischer** in Leipzig.
*9. Spiel und Sport: **G. T. Walker** in Simla (Indien).
10. Dynamische Probleme der Maschinentechnik: **K. Heun** in Karlsruhe.

III. Behandlung beliebiger Systeme von endlichem Freiheitsgrad in analytischer Allgemeinheit.

11. Entwickelung allgemeiner Methoden: **P. Stäckel** in Hannover.
12. Spezialdiskussion dynamischer Probleme: **P. Stäckel** in Hannover.
13. Rotation starrer Körper und Verwandtes: **P. Stäckel** in Hannover.

II. Teil.

Inhaltsverzeichnis von Band IV, Teil II.

C. Mechanik der deformierbaren Körper.

I. Analytisch-geometrische Hilfsmittel.

*14. Geometr. Grundbegriffe: **M. Abraham** in Göttingen.

II. Hydrodynamik.

*15. Physikalische Grundlegung: **A. E. H. Love** in Oxford.
*16. Theoretische Ausführungen: **A. E. H. Love** in Oxford.
*17. Aërodynamik: **S. Finsterwalder** in München.
*18. Ballistik: **C. Cranz** in Berlin.
19. Unstetige Bewegungen in kontinuierlichen Medien: **G. Zemplén** in Budapest.
20. Hydraulik (Strömen von Wasser in Röhren u. Kanälen): **Ph. Forchheimer** in Graz.
21. Theorie der hydraulischen Motoren u. Pumpen: **M. Grübler** in Dresden.

III. Elastizität und Festigkeitslehre.

22. Theoretische Behandlung der statischen Probleme: **O. Tedone** in Genua.
23. Schwingungen, insbesondere Akustik: **H. Lamb** in Manchester.
24. Die Statik der technischen Konstruktionen: **L. Prandtl** in Göttingen und **N. N.**
25. Theorie der auf elastischer Wirkung beruhenden Meßapparate: **Ph. Furtwängler** in Bonn.
26. Physikal. Grundlagen der Elastizitäts- und Festigkeitslehre: **A. Sommerfeld** in Aachen.

D. Mechanik der aus sehr zahlreichen diskreten Teilen bestehenden Systeme.

27. Das Eingreifen der Wahrscheinlichkeitsrechnung: **L. Boltzmann** in Wien.
28. Schiffsbewegung: **A. Kriloff** in Petersburg.

☛ Bisher erschien:

Teil I Heft 1 (1). [121 S.] 1901. n. ℳ 3.40.
— I — 2 (2). [156 S.] 1902. n. ℳ 4.60.
— I — 3 (3). [156 S.] 1903. n. ℳ 4.60.
Teil I 2. Hälfte Heft 1 (7—9). [152 S.] 1901. n. ℳ 4.40.
— II Heft 1 (14—16) [147 S.] 1901. n. ℳ 3.80.
Teil II Heft 2 (17. 18.). [129 S.] 1903. n. ℳ 3.80.

Wüllner, Geheimer Regierungsrat Dr. **Adolph,** Professor der Experimentalphysik an der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. In 4 Bänden. 5. verbesserte Aufl. Mit 1092 in den Text gedr. Abb. u. Fig. u. 4 lithographierten Tafeln. gr. 8. 1895/99.

Einzeln:

I. Band. Allgemeine Physik und Akustik. Mit 321 i. d. Text gedr. Abb. u. Fig. [X u. 1000 S.] 1895. n. ℳ 12.—, in Hfzbd. ℳ 14.—
II. — Die Lehre von der Wärme. Mit 131 i. d. Text gedr. Abb. u. Fig. [XI u. 936 S.] 1896. n. ℳ 12.—, in Hfzbd. ℳ 14.—
III. — Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektrizität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. Mit 341 i. d. Text gedr. Abb. u. Fig. [XV u. 1415 S.] 1897. n. ℳ 18.—, in Hfzbd. ℳ 20.—
IV. — Die Lehre von der Strahlung. Mit 299 i. d. Text gedr. Abb. u. Fig. u. 4 lithogr. Taf. [XII u. 1042 S.] 1899. n. ℳ 14.—, in Hfzbd. ℳ 16.—

☛ **Bei gleichzeitigem Bezug aller 4 Bände liefert die Verlagshandlung das Werk zu dem ermäßigten Preise von ℳ 28.— für das geheftete, ℳ 34.— für das gebundene Exemplar. — Im Umtausch gegen frühere Auflagen bei direkter Einsendung der Bände geheftet für ℳ 20.—**

Abraham, Dr. **M.,** Privatdozent in Göttingen und Dr. **A. Föppl,** Professor in München, Theorie der Elektrizität. I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Föppl. 2., umgearb. Aufl. von Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 443 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 12.—
II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. Abraham. Mit 5 Figuren im Text. [X u. 405 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 10.—

[Fortsetzung am Ende des Buches.]



THEORIE DER ELEKTRIZITÄT.

ZWEITER BAND:

ELEKTROMAGNETISCHE THEORIE DER STRAHLUNG.

VON

DR. M. ABRAHAM.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ELEKTROMAGNETISCHE THEORIE DER STRAHLUNG.

VON

DR. M. ABRAHAM.

MIT 5 FIGUREN IM TEXT.





LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

Vorwort zum zweiten Band.

Die Maxwellsche Theorie des elektromagnetischen Feldes, in welche der erste Band dieses Werkes einführt, bildet gewissermaßen das erste Stockwerk der modernen Theorie der Elektrizität. Kaum hatten die Physiker sich hier eingerichtet, als eine Fülle neuer Erscheinungen auf sie einstürmte und eine Weiterführung des Baues erheischte. Das zweite Stockwerk des Gebäudes der Elektrizitätslehre, die Elektronentheorie, nimmt diese meist als elektromagnetische Strahlung sich kundgebenden Erscheinungen auf. Auf Maxwellschen Vorstellungen bauend, betrachtet die Elektronentheorie den Raum als ein physikalisches Kontinuum, welches die elektromagnetischen Wirkungen überträgt. Ausgangsstellen und Angriffsstellen dieser Wirkungen liegen in der Elektrizität. Diese soll aus unteilbaren Elementarquanten, „Elektronen" genannt, zusammengesetzt sein. Jeder elektrische Strom wird als Konvektionsstrom bewegter Elektronen aufgefaßt. Die Kathodenstrahlen werden gedeutet als ein solcher Konvektionsstrom negativer Elektronen, die mit großer Geschwindigkeit einander parallel sich bewegen; dieser „Konvektionsstrahlung" tritt die „Wellenstrahlung" gegenüber, die durch Schwingungen eben dieser Teilchen erregt sein soll. Der Theorie beider Arten elektromagnetischer Strahlung ist der vorliegende zweite Band der „Theorie der Elektrizität" gewidmet.

Der erste Abschnitt beginnt mit der Darlegung der physikalischen und mathematischen Grundlagen der Elektronentheorie. Es werden die Tatsachen aufgeführt, welche die Annahme einer atomistischen Struktur der Elektrizität nahe legen. Aus den Grundgleichungen der Elektronentheorie wird der Begriff der „elektromagnetischen Bewegungsgröße" abgeleitet, welcher für die elektro-

magnetische Mechanik überhaupt, sowohl für die Mechanik der Elektronen, wie auch für die Theorie des Strahlungsdruckes, von fundamentaler Bedeutung ist. Es werden ferner allgemeine Lösungen der Grundgleichungen gegeben, mit Hilfe der „elektromagnetischen Potentiale“, die als Verallgemeinerungen des skalaren Potentiales elektrostatischer Felder, bzw. des Vektorpotentiales stationärer magnetischer Felder anzusehen sind; jene Lösungen, auf welche wir weiterhin oft zurückgreifen, können auch durch einen einzigen Vektor zusammengefaßt werden, der von uns als „Hertzscher Vektor“ bezeichnet wird.

Sodann folgt im zweiten Kapitel die Theorie einer beliebig bewegten Punktladung. Das schwingende negative Elektron bildet das einfachste, durch das Zeemansche Phänomen in vielen Fällen als naturgetreu bestätigte Modell einer Lichtquelle; was die entsandte Wellenstrahlung anbelangt, kann das Elektron in den meisten Fällen durch eine Punktladung ersetzt werden. So sind denn die Entwickelungen dieses Kapitels auch für die Dynamik des Elektrons von Interesse, um so mehr, als sie unabhängig von jeder Hypothese über die Gestalt des Elektrons sind.

Um die Mechanik des Elektrons vollständig zu entwickeln, bedarf es allerdings einer besonderen Annahme über dessen Form. Ich habe an der Annahme eines starren kugelförmigen Elektrons festgehalten, die ich der rein elektromagnetischen Theorie der Kathoden- und Radiumstrahlen zugrunde gelegt hatte. Mir scheint nichts vorzuliegen, was dazu nötigen könnte, diese Grundhypothese fallen zu lassen. Immerhin habe ich auch den abweichenden Auffassungen von H. A. Lorentz in diesem Buche Rechnung getragen. Die wertvollen aus dem Bereiche der beobachtbaren quasistationären Bewegung herausführenden Untersuchungen von P. Hertz und A. Sommerfeld, welche gleichfalls auf der Voraussetzung des starren kugelförmigen Elektrons fußen, sind in die hier gegebene Darstellung der Dynamik des Elektrons eingearbeitet worden.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den elektromagnetischen Vorgängen in wägbaren Körpern. Die Hauptgleichungen der Elektrodynamik, welche die beobachtbaren elektromagnetischen Vektoren miteinander verknüpfen, ergeben sich nach H. A. Lorentz

durch Mittelwertsbildung aus den für die Felder der einzelnen Elektronen geltenden Gleichungen. Für ruhende Körper erhält man auf diese Weise die Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie; für bewegte Körper aber folgen die Lorentzschen Gleichungen, welche von denen der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper verschieden sind, und mit der Erfahrung in besserer Übereinstimmung sich befinden. Daß die elektromagnetischen und die optischen Eigenschaften dielektrischer Körper durch die Anwesenheit von „Polarisationselektronen" befriedigend erklärt werden, wird insbesondere für die magnetische Drehung der Polarisationsebene und die Dispersion der Körper gezeigt. Die metallische Leitung wird mit P. Drude auf frei bewegliche „Leitungselektronen" zurückgeführt, die in regelloser Wärmebewegung begriffen sind.

Im zweiten Abschnitt sind auch einige Probleme behandelt worden, welche mit der atomistischen Hypothese nur lose zusammenhängen. Man findet hier Sätze abgeleitet, welche die Strahlung bestimmen, die von hochfrequenten Strömen in linearen Leitern entsandt wird; insbesondere die Anwendung dieser Sätze auf Sendeantennen ist für die drahtlose Telegraphie von Interesse. Ich bin allerdings auf diese Probleme nicht so ausführlich eingegangen, wie ich ursprünglich beabsichtigte, sondern habe mich mit der Darlegung desjenigen begnügt, was zur Beurteilung der bei der drahtlosen Telegraphie stattfindenden Vorgänge unentbehrlich ist.

Auf den Gesetzen der Lichtfortpflanzung im Raume und auf den fundamentalen Sätzen der elektromagnetischen Mechanik beruht die gegebene Lösung des Problems der Reflexion des Lichtes durch einen bewegten Spiegel. Diese Lösung ist aufs engste verknüpft mit dem thermodynamischen Gesetze der strahlenden Wärme, das von so hervorragender praktischer und theoretischer Bedeutung geworden ist. Aus der experimentellen Bestätigung dieses Gesetzes dürfen wir schließen, daß die Prinzipien der elektromagnetischen Mechanik, auf welche unser Beweis sich stützt, der Wirklichkeit entsprechen.

Schwierigkeiten erwachsen der Elektronentheorie durch das negative Ergebnis aller bisherigen Versuche, die auf eine Ent-

deckung des Einflusses der Erdbewegung auf das Licht irdischer Lichtquellen hinzielen. Zu diesen Fragen nehmen wir in den letzten Paragraphen Stellung.

Herrn Dr. P. Hertz bin ich für seine Mitarbeit an dem Register, welches beide Bände der „Theorie der Elektrizität" umfaßt, zu Dank verpflichtet, und nicht minder Herrn Dr. G. Rümelin für seine Hilfe beim Lesen der Korrekturen des zweiten Bandes.

Die Theorie der Elektrizität scheint jetzt in das Stadium einer ruhigeren Entwickelung eingetreten zu sein. Es scheint der Zeitpunkt gekommen, wo man Halt machen und auf das Erreichte zurückschauen darf. Einem solchen Rückblick ist das vorliegende Werk gewidmet. Es will über die Grundlagen der Theorie Klarheit verbreiten und so den weiteren Fortschritt vorbereiten. Mag es dies Ziel nicht verfehlen!

Wiesbaden, im März 1905.

M. Abraham.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Das Feld und die Bewegung der einzelnen Elektronen.

Erstes Kapitel.

Die physikalischen und mathematischen Grundlagen der Elektronentheorie.

Zweites Kapitel.

Die Wellenstrahlung einer bewegten Punktladung.

Drittes Kapitel.

Die Mechanik der Elektronen.

Zweiter Abschnitt.

Elektromagnetische Vorgänge in wägbaren Körpern.

Erstes Kapitel.

Ruhende Körper.

Zweites Kapitel.

Bewegte Körper.



Erster Abschnitt.

Das Feld und die Bewegung der einzelnen Elektronen.

Erstes Kapitel.

Die physikalischen und mathematischen Grundlagen der Elektronentheorie.

§ 1. Das elektrische Elementarquantum.

Wir erwähnten bereits im ersten Bande dieses Werkes (S. 191), daß die bei der Elektrolyse stattfindenden Vorgänge die Einführung atomistischer Vorstellungen in die Elektrizitätslehre nahelegen. Den von Faraday entdeckten Gesetzen gemäß scheidet ein gegebener Strom in verschiedenen Elektrolyten chemisch äquivalente und der Stromstärke proportionale Mengen wägbarer Materie an den Elektroden ab. Schreibt man der Materie eine atomistische Konstitution zu, so kann man nicht umhin, auch die Elektrizität aus unteilbaren positiven und negativen Elementarquanten zusammengesetzt zu denken. An jeder Valenz eines elektrolytischen Ions würde ein solches Elementarquantum haften. Die sogenannte Faradaysche Konstante — die von einem Gramm Wasserstoff transportierte Elektrizitätsmenge — gibt nach dieser Auffassung den Quotienten aus Ladung e und Masse m_H eines Wasserstoffions an. Messen wir e in absoluten elektrostatischen Einheiten, so erhalten wir

$$(1) \qquad \frac{e}{m_H} = 9660 \cdot 3 \cdot 10^{10} = 2{,}90 \cdot 10^{14}.$$

Diese auf unmittelbarer Messung beruhende Beziehung verknüpft das elektrische Elementarquantum e mit dem Atomgewichte m_H des Wasserstoffes.

Die Annahme von Atomen der Elektrizität wird notwendig, sobald man die wägbare Materie als atomistisch konstituiert betrachtet. Wenn nun auch die Atomistik in der Physik der Materie als wertvolle Arbeitshypothese sich erwiesen hat, so steht doch mancher Forscher auch heute noch auf dem Standpunkte, daß für die Materie die Atom- und Molekularhypothese nicht sicher genug begründet sei, um das Lehrgebäude der Chemie und Physik auf ihr aufzubauen. Ein solcher Forscher wird sich durch die Tatsachen der Elektrizitätsleitung in Elektrolyten nicht gezwungen finden, die reale Existenz eines elektrischen Elementarquantums zuzugeben.

Nun hat aber im letzten Jahrzehnt die atomistische Hypothese uf dem Gebiete der Elektrizitätslehre eine neue Stütze erhalten durch die Forschungen, die über die Elektrizitätsleitung der Gase angestellt worden sind. Während die Gase, im Gegensatz zu den Metallen und den Elektrolyten, in ihrem normalen Zustande Nichtleiter oder wenigstens sehr schlechte Leiter sind, kann ihnen durch äußere Einwirkungen — z. B. durch Kathodenstrahlen, durch Röntgenstrahlen oder durch die Strahlung der radioaktiven Körper — eine abnorme Leitfähigkeit gegeben werden. Diese abnorme Leitfähigkeit führt man darauf zurück, daß durch Einwirkung jener Strahlungen im Gase elektrisch geladene Teilchen entstehen, welche nun im elektrischen Felde wandern. Diese positiven und negativen Teilchen bezeichnet man, unter Beibehaltung des in der Elektrolyse gebräuchlichen Wortes, als Ionen. Indessen hat man es bei diesen Gasionen nicht, wie etwa bei einwertigen elektrolytischen Ionen, mit Verbindungen des elektrischen Elementarquantums mit Bestandteilen nur eines Moleküles zu tun; es scheinen sich vielmehr in einem Gase dem elektrischen Kerne neutrale Moleküle in wechselnder, von Temperatur und Druck des Gases abhängiger Anzahl anzulagern.

Der Mechanismus dieser Anlagerung wird verständlich, wenn man auf Grund der Vorstellungen der kinetischen Gastheorie die Wechselwirkungen der elektrischen Kerne mit den neutralen Gasmolekülen betrachtet und das unter dem Ein-

fluß dieser Wechselwirkungen sich herstellende kinetische Gleichgewicht untersucht. Da ein ausführliches Eingehen auf diese Dinge uns von dem eigentlichen Gegenstande dieses Werkes zu weit abführen würde, so sei der Leser auf die sehr lehrreiche Abhandlung von P. Langevin[1]) hingewiesen; dieselbe enthält auch eine Übersicht über die Eigenschaften ionisierter Gase, deren Kenntnis man hauptsächlich den Forschungen der Cambridger Schule verdankt.

Die Existenz diskreter elektrischer Teilchen in einem Gase, welches der Durchstrahlung mit Röntgenstrahlen, mit Kathodenstrahlen oder Radiumstrahlen ausgesetzt war, wird nun durch eine bemerkenswerte Eigenschaft eines solchen Gases bewiesen: Wird ein solches Gas mit Wasserdampf gemischt und der letztere, etwa durch plötzliche Expansion, in den Zustand der Übersättigung gebracht, so findet eine Kondensation des Wasserdampfes statt, es bildet sich eine aus kleinen Tröpfchen bestehende Wolke; und zwar findet dieses bei einem Grade der Übersättigung statt, bei dem ohne vorherige Durchstrahlung des Gases eine Kondensation des Wasserdampfes nicht erfolgt wäre. Da die Eigenschaft, den Wasserdampf zu kondensieren, der durch die Durchstrahlung erteilten abnormen Leitfähigkeit parallel geht, so liegt es nahe, den Gasionen die Rolle von Kondensationskernen zuzuschreiben. Trifft das zu, so macht die Bildung von Wassertröpfchen um die Gasionen als Kerne die Gasionen der unmittelbaren Beobachtung und der Abzählung zugänglich.

Auf der Beobachtung derartiger Wolken von Wassertröpfchen fußen die Bestimmungen der Ladung eines Gasions, die von J. S. Townsend[2]), J. J. Thomson[3]) und H. A. Wilson[4]) ausgeführt worden sind. Die Masse des einzelnen Tröpfchens

---

1) P. Langevin. Annales de Chimie et Physique (7). 28. S. 289 bis 384, 433—530. 1903.

2) J. S. Townsend. Phil. Mag. 45, S. 125. 1898.

3) J. J. Thomson. Phil. Mag. 46, S. 528, 1898; 48, S. 547, 1899; 5, S. 346, 1903.

4) H. A. Wilson. Phil. Mag. 5, S. 429, 1903.

kann aus der Fallgeschwindigkeit der Wolke berechnet werden. Nach G. G. Stokes ist die Geschwindigkeit, mit der eine kleine Kugel vom Radius a unter dem Einfluß der Schwerkraft fällt, durch die Formel gegeben

$$v = \frac{2}{9} g \frac{a^2}{\zeta},$$

wo g die Beschleunigung der Schwere, ζ den Reibungskoeffizienten des Gases vorstellt. Aus dieser Gleichung ist der Radius und somit die Masse m der Tröpfchen zu bestimmen.

Die Geschwindigkeit eines jeden Tröpfchens ist proportional der auf dasselbe wirkenden Kraft; wirkt nur die Schwere, so beträgt die Kraft mg. Wird aber ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ erregt, so ist der Schwerkraft mg die Kraft $e\mathfrak{E}$ hinzuzufügen, die das Feld auf das geladene Tröpfchen ausübt. Diese Kraft wirkt, wenn $\mathfrak{E}$ vertikal nach unten gerichtet ist, im Sinne der Schwerkraft oder im entgegengesetzten, je nachdem es sich um die positiven oder um die negativen Tröpfchen handelt. Die Fallgeschwindigkeit wird dadurch verändert, im Verhältnis

$$\frac{v'}{v} = \frac{mg \pm e|\mathfrak{E}|}{mg}.$$

Durch Beobachtung der Fallgeschwindigkeit, zuerst unter dem Einfluß der Schwerkraft allein, dann unter Mitwirkung eines vertikalen elektrischen Feldes, kann somit die Ladung e des einzelnen Tröpfchens ermittelt werden. Auf diesem Wege fand H. A. Wilson für e als mittleren Wert $3{,}1 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische Einheiten. Dieses Ergebnis ist in guter Übereinstimmung mit den letzten Resultaten J. J. Thomsons.

Enthält nun ein Tröpfchen nur ein einziges Ion, so ist durch diese Zahl die Ladung eines Gasions gegeben. A priori wäre es allerdings denkbar, daß einzelne Tröpfchen mehrere Ionen enthielten, doch ist dieses angesichts der gleichen Beschaffenheit aller Tröpfchen höchst unwahrscheinlich. Es beträgt hiernach die Ladung eines Gasions rund

$$e = 3 \cdot 10^{-10} \tag{2}$$

elektrostatische Einheiten.

Durch sinnreiche Versuche, die J. S. Townsend[1]) über die Wanderungsgeschwindigkeit und die Diffusion der Gasionen angestellt hat, ist ferner bewiesen, daß die Ladung der Gasionen in allen Fällen gleich der Ladung eines einwertigen elektrolytischen Ions ist. Dieses Ergebnis macht es höchst wahrscheinlich, daß die elektrische Ladung der Teilchen, deren Existenz jene Kondensationsphänomene enthüllen, mit dem elektrischen Elementarquantum identisch ist.

Setzen wir den Zahlwert (2), der nach Townsend gleichzeitig die Ladung eines Wasserstoffions angibt, in (1) ein, so erhalten wir als Masse eines Wasserstoffatoms:

(2a) $$m_H = 10^{-24} \text{ Gramm.}$$

Ist N die sogenannte Loschmidtsche Zahl, d. h. die Zahl der Moleküle, die sich bei normaler Temperatur und normalem Druck in dem Kubikzentimeter eines Gases befinden, so ist $2 m_H \cdot N$ gleich der Dichte des Wasserstoffes $(0{,}8961 \cdot 10^{-4})$. Man erhält demnach für die Loschmidtsche Zahl

(2b) $$N = 4{,}5 \cdot 10^{19},$$

einen Zahlwert, der mit den besten Bestimmungen aus gastheoretischen Daten gut übereinstimmt und wohl als die genaueste vorliegende Bestimmung dieser für die Molekulartheorie fundamentalen Zahl anzusehen ist.

Wir finden also, daß die verschiedensten Eigenschaften der Materie und der Elektrizität zu denselben Werten der fundamentalen Konstanten der Atomistik führen. Es bestätigen sich in erfreulicher Weise die Grundvorstellungen der atomistischen Hypothese. Wir werden daher in dem vorliegenden zweiten Bande der „Theorie der Elektrizität“ die Elektrizität als aus kleinsten elektrischen Elementarquanten bestehend annehmen.

§ 2. Die Kathodenstrahlen.

Schickt man den elektrischen Strom durch eine stark evakuierte Glasröhre, so zeigen die Wände der Röhre eine

1) J. S. Townsend. Phil. Trans. 193, S. 129. 1899.

eigentümliche grüne Fluoreszenz. Die experimentelle Untersuchung dieser Erscheinung, die zuerst von J. Plücker, W. Hittorf und E. Goldstein unternommen wurde, hat zu der Erkenntnis geführt, daß man es hier mit einer Art von Strahlen zu tun hat, die von der Kathode ausgehen; sie wurden demgemäß von dem letztgenannten Forscher als „Kathodenstrahlen“ bezeichnet. Über die Natur dieser Strahlen wurden zwei verschiedene Hypothesen aufgestellt, die man als „Emissionshypothese“ und „Undulationshypothese“ unterscheiden kann. Die Emissionshypothese, die hauptsächlich in England, durch W. Crookes und A. Schuster, entwickelt wurde, betrachtete die Kathodenstrahlen als negativ geladene Gasmoleküle, die von der Kathode abgestoßen und in die Röhre hinein geschleudert werden. Manche Tatsachen, insbesondere die magnetische Ablenkbarkeit der Strahlen, fügten sich ungezwungen dieser Erklärung. In Deutschland verhielt man sich dieser Erklärung gegenüber dennoch ablehnend; man hielt die Kathodenstrahlen für eine viel feinere, dem Lichte ähnliche Erscheinung. Diesen Standpunkt vertrat auch Heinrich Hertz, der zuerst fand, daß die Kathodenstrahlen durch dünne Metallblättchen hindurchdringen. Er sah die magnetische Ablenkung der Kathodenstrahlen als einen der magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes analogen Vorgang an und hatte wohl ursprünglich eine Undulationstheorie im Sinne, welche die Kathodenstrahlen als longitudinale elektromagnetische Wellen deutete; zeigten doch die theoretischen Untersuchungen von Helmholtz, daß die Fernwirkungstheorie der Elektrodynamik solche longitudinalen Wellen zuließ. Nachdem aber durch Hertz selbst die Maxwellschen Vorstellungen zum Siege geführt waren, blieb für longitudinale Wellen kein Platz mehr. So hat denn die Undulationstheorie der Kathodenstrahlen niemals eine greifbare Gestalt angenommen.

Jene Entdeckung von Heinrich Hertz wurde der Ausgangspunkt für die rasche Entwickelung, welche die Theorie der Kathodenstrahlen in neuerer Zeit erfahren hat. Auf ihr fußten die Arbeiten von Ph. Lenard, welcher die Fortpflanzung

der Kathodenstrahlen außerhalb der Entladungsröhre verfolgte und höchst bemerkenswerte Beziehungen der Absorption der Strahlen zur Dichte der durchstrahlten Substanz feststellte. Die Untersuchungen Lenards wiederum gaben den Anstoß zur Entdeckung W. C. Röntgens, daß die Glaswand beim Auftreffen der Kathodenstrahlen eine neue, von ihm als X-Strahlen bezeichnete Strahlenart aussendet.

Durch die Röntgensche Entdeckung wurde eine Reihe von Physikern zur quantitativen Untersuchung der Kathodenstrahlen angeregt. Insbesondere sind die Arbeiten von E. Wiechert[1]), W. Kaufmann[2]), W. Kaufmann und E. Aschkinass[3]), sowie diejenigen von J. J. Thomson[4]) und Ph. Lenard[5]) bemerkenswert. Diese bestätigten die Emissionshypothese insofern, als sie übereinstimmend ergaben, daß die Erscheinungen sich widerspruchsfrei erklären lassen, wenn man negativ geladene, träge Teilchen in dem Kathodenstrahle bewegt annimmt. Sie rechtfertigten anderseits die von den Gegnern der Emissionstheorie geltend gemachten Bedenken insofern, als sie für den Quotienten aus Ladung und träger Masse der Teilchen Zahlwerte ergaben, die den Quotienten $e:m_H$ aus Ladung und Masse eines elektrolytischen Wasserstoffions um das Zweitausendfache übertreffen. Auch ergab sich, daß die Eigenschaften der Kathodenstrahlen von der chemischen Natur des Gases und dem Elektrodenmaterial unabhängig sind und nur von der Potentialdifferenz abhängen, durch die sie auf ihre Geschwindigkeit gebracht sind. In Anbetracht dieser Tatsache wäre die Annahme, daß die Träger der Strahlen Atome der wägbaren Materie sind, etwa Wasserstoffatome, geladen mit 2000 negativen Elementarquanten, höchst unwahrscheinlich. Vom atomistischen Stand-

1) E. Wiechert. Sitzungsber. d. phys.-ökonom. Ges. zu Königsberg i. Pr. Jan. 1897, S. 1. Nachrichten der Göttinger Ges. der Wissensch. 1898, S. 87 u. S. 260.

2) W. Kaufmann. Ann. d. Phys. 61, S. 544. 1897.

3) W. Kaufmann u. E. Aschkinass. Ann. d. Phys. 62, S. 588. 1897.

4) J. J. Thomson. Phil. Mag. 44, S. 293. 1897.

5) Ph. Lenard. Ann. d. Phys. 64, S. 279; 65, S. 504. 1898.

punkte aus ist es eher plausibel, daß die Ladung jedes Strahlteilchens ein elektrisches Elementarquantum, daß aber die träge Masse nur ein Zweitausendstel der Masse des Wasserstoffions ist. Die weitere Entwickelung hat diese letztere, insbesondere von E. Wiechert und J. J. Thomson ausgesprochene Vermutung mehr und mehr bestätigt: Es sind die von wägbarer Materie freien Atome der negativen Elektrizität, die sich im Kathodenstrahle bewegen.

Wir wollen mit J. Stoney diese Atome negativer Elektrizität als „Elektronen“ bezeichnen. Wir schreiben ihnen die Ladung $(-e)$ und die träge Masse m zu und leiten, allein auf Grund dieser Eigenschaften, die an Kathodenstrahlen festgestellten Gesetze ab. Die Erörterung der Frage, wieso die Elektronen, wenn sie unbelastet mit wägbarer Materie sich bewegen, überhaupt Trägheit besitzen, weisen wir einem späteren Abschnitte zu.

Da die Bewegung des Elektrons im leeren Raume stattfindet, so brauchen wir zwischen magnetischer Induktion $\mathfrak{B}$ und magnetischer Feldstärke $\mathfrak{H}$ nicht zu unterscheiden. Auf das bewegte Elektron, von der Ladung $(-e)$, wirkt somit im elektromagnetischen Felde nach Bd. I, Gleichung 246a, S. 412, die Kraft

$$\mathfrak{K} = -e\mathfrak{F}, \tag{3}$$

wo

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] \tag{3a}$$

die auf die Einheit der Ladung berechnete elektromagnetische Kraft darstellt.

Die Bewegungsgleichung des Elektrons lautet daher

$$m \cdot \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -e\mathfrak{F}. \tag{4}$$

Wir führen zur Abkürzung für den Quotienten

$$\eta = \frac{e}{cm} \tag{4a}$$

aus dem elektromagnetisch gemessenen Betrage der Ladung $\left(\frac{e}{c}\right)$

und der Masse (m) des Elektrons die Bezeichnung „spezifische Ladung" ein; es wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -c\eta\mathfrak{F} = -c\eta\mathfrak{E} - \eta\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}]. \tag{4b}$$

Das zweite Glied der rechten Seite der Bewegungsgleichung, die vom magnetischen Felde herrührende Kraft bzw. Beschleunigung, steht stets senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$; das Vorhandensein eines äußeren magnetischen Feldes bedingt also niemals eine Arbeitsleistung.

Ist insbesondere das äußere elektrische Feld ein elektrostatisches und φ sein Potential, so ist

$$m \cdot \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = e \cdot \nabla\varphi. \tag{5}$$

Die skalare Multiplikation mit $\mathfrak{v}$ ergibt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \cdot \mathfrak{v}^2\right) = m\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = e\,(\mathfrak{v} \cdot \nabla\varphi) = e\,\frac{\partial\varphi}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt},$$

und die Integration nach der Zeit für das Intervall von t_0 bis t

$$\frac{1}{2} m \cdot \mathfrak{v}^2 - \frac{1}{2} m\,\mathfrak{v}_0^2 = e\,(\varphi - \varphi_0). \tag{5a}$$

Hier steht links der Zuwachs der lebendigen Kraft des Elektrons, rechts die Arbeit, die das elektrostatische Feld in dem betreffenden Zeitintervalle an dem Elektron geleistet hat; letztere ist proportional dem Anstiege des elektrostatischen Potentiales.

Bewegt sich etwa das Elektron von der auf dem Potential φ_0 gehaltenen Kathode bis zu einem Punkte, dessen Potential bekannt ist, so bestimmt (5a) die Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}|$, wenn die Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}_0|$ gegeben ist, mit der das Elektron die Kathode verläßt. Diese Anfangsgeschwindigkeit ist freilich unbekannt. Man nimmt indessen mit gutem Grunde an, daß diese Anfangsgeschwindigkeit klein ist gegen die Geschwindigkeiten, die es beim Durchlaufen des starken in der Entladungsröhre herrschenden elektrischen Feldes erhält. Man setzt daher $\mathfrak{v}_0 = 0$ und findet

$$|\mathfrak{v}| = \sqrt{\frac{2e}{m}(\varphi - \varphi_0)} = \sqrt{2c\eta\,(\varphi - \varphi_0)}. \tag{6}$$

Wir wollen nun den Fall behandeln, wo das Elektron mit der so erhaltenen Geschwindigkeit (6) in einen Raum eintritt, in welchem ein konstantes elektrostatisches Potential herrscht. Ist kein magnetisches Feld vorhanden, so wird es sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit weiter bewegen. Treten indessen magnetische Kräfte hinzu, so wird die Bahn sich krümmen. Wir wollen annehmen, daß das magnetische Feld homogen ist, und daß das Elektron in dieses Feld mit einer zu den Kraftlinien senkrechten Geschwindigkeit hineinfliegt. Der Beschleunigungsvektor ist dann nach (4b)

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\eta\,[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]. \tag{6a}$$

Das Elektron bewegt sich, wie die Zerlegung des Beschleunigungsvektors in eine zu $\mathfrak{v}$ parallele und eine zu $\mathfrak{v}$ senkrechte Komponente (I, Gl. 8, S. 9) ergibt, in einer zu $\mathfrak{H}$ senkrechten Ebene mit konstanter Geschwindigkeit. Es beschreibt eine Kreisbahn, deren Radius R durch die Gleichung bestimmt ist

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{R} = \eta \cdot |\mathfrak{v}| \cdot |\mathfrak{H}|.$$

Die Bahnkrümmung

$$\frac{1}{R} = \eta \cdot \frac{|\mathfrak{H}|}{|\mathfrak{v}|} \tag{7}$$

ist demnach um so größer, je stärker das magnetische Feld und je kleiner die Geschwindigkeit des Elektrons ist.

Ist das homogene magnetische Feld nicht senkrecht zu der ursprünglichen Bewegung des Elektrons gerichtet, so zerlegen wir zweckmäßigerweise den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ in zwei Vektoren, $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, von denen der erste zu $\mathfrak{H}$ parallel, der zweite zu $\mathfrak{H}$ senkrecht ist. Der erste liefert keinen Beitrag zu dem Vektorprodukte aus $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{H}$. Projizieren wir die Bewegung einerseits auf eine zu $\mathfrak{H}$ parallele Gerade, anderseits auf eine zu $\mathfrak{H}$ senkrechte Ebene, so zerfällt (6a) in die beiden Gleichungen

$$\frac{d\mathfrak{v}_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{v}_2}{dt} = -\eta\,[\mathfrak{v}_2\mathfrak{H}]. \tag{7a}$$

Die zu $\mathfrak{H}$ parallele Komponente der Geschwindigkeit bleibt konstant. Auf eine zu $\mathfrak{H}$ senkrechte Ebene projiziert, stellt sich die Bewegung als Kreisbahn dar, mit dem reziproken Radius

$$\text{(7b)} \qquad \frac{1}{R_2} = \eta \cdot \frac{|\mathfrak{H}|}{|\mathfrak{v}_2|}.$$

In einem homogenen magnetischen Felde beschreibt das Elektron demnach eine Schraubenlinie. In dem speziellen Falle, wo die Bewegung anfangs senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien erfolgte, artet die Bahn in eine Kreisbahn aus.

Wir betrachten wieder den letztgenannten Spezialfall und drücken die Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}|$ auf Grund von (6) durch die durchlaufene Spannungsdifferenz $(\varphi - \varphi_0)$ aus. Alsdann ergibt Gleichung (7):

$$\text{(8)} \qquad \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{\eta}{2c(\varphi - \varphi_0)}} \cdot |\mathfrak{H}| \cdot$$

Die Krümmung des Kathodenstrahles im senkrechten Magnetfelde ist der Wurzel aus der durchlaufenen Spannungsdifferenz umgekehrt proportional. Die Versuche von W. Kaufmann[1]) haben dieses Gesetz ergeben und so das Zutreffen der zugrunde gelegten Bewegungsgleichung bestätigt.

Diese Messungen konnten gleichzeitig dazu dienen, die spezifische Ladung der Kathodenstrahlträger zu ermitteln. So erhielten W. Kaufmann[2]) und S. Simon[3]) den Wert

$$\text{(9)} \qquad \eta = \frac{e}{cm} = 1{,}865 \cdot 10^7,$$

für die spezifische Ladung des negativen Elektrons.

Eine jede der Gleichungen (6) oder (7) kann verwandt werden, um die Geschwindigkeit zu berechnen, die den Elektronen in der Entladungsröhre erteilt wird. Dieselbe liegt bei den üblichen Spannungsdifferenzen von Anode und Kathode

1) W. Kaufmann. Ann. d. Phys. 61, S. 544. 1897.
2) W. Kaufmann. Ann. d. Phys. 65, S. 431. 1898.
3) S. Simon. Ann. d. Phys. 69, S. 589. 1899.

zwischen $^1/_{10}$ und $^1/_3$ der Lichtgeschwindigkeit. Werte von derselben Größenordnung sind von E. Wiechert[1]) durch direkte Messung der Geschwindigkeit gefunden worden.

Da nach (9)

$$\frac{e}{m} = 5{,}60 \cdot 10^{17} \tag{9a}$$

ist, so folgt durch Vergleichung mit (1)

$$\frac{m_H}{m} = 1930 \tag{9b}$$

als Quotient der trägen Massen von Wasserstoffatom und Elektron.

§ 3. Klassifikation der Strahlungen.

Die Maxwellsche Theorie versteht unter „Strahlung“ einen elektromagnetischen Energiestrom; diesen bestimmt sie durch den Poyntingschen Vektor (vgl. I § 77, S. 356). Sie lehrt, daß die Lichtwellen elektromagnetische Energie mitführen, mithin als Strahlungsvorgänge anzusprechen sind. Die Lichtwellen, wie überhaupt alle elektromagnetischen Wellen, pflanzen sich in dem leeren Raume mit einer ganz bestimmten Geschwindigkeit

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

fort (vgl. I § 69, S. 303). Die verschiedenen Arten elektromagnetischer Wellen, welche wir kennen, sind nur der Wellenlänge, aber nicht der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach verschieden. Ordnen wir nach der Wellenlänge, so haben wir zuerst die ultravioletten Strahlen, dann das eigentliche sichtbare Licht; dann folgen die ultraroten, nur durch ihre thermische Wirkung sich kundgebenden Strahlen, deren langwelligste die Rubensschen Reststrahlen sind. Zwischen den längsten bekannten Wärmestrahlen ($\lambda = 6 \cdot 10^{-3}$ cm) und den kürzesten Wellenlängen der vom elektrischen Funken ausgelösten Schwin-

1) E. Wiechert. Nachr. der Göttinger Ges. der Wissensch. 1898, S. 260. Ann. d. Phys. 69, S. 739. 1899.

gungen ($\lambda = 0,6$ cm) klafft noch eine beträchtliche Lücke. Dann folgt eine kontinuierliche Reihe von Wellen, die wir auf rein elektrischem Wege herzustellen vermögen; sie erstreckt sich von den raschesten Hertzschen Schwingungen bis zu den langsamsten Wechselströmen der Technik.

Alle diese Strahlungen können wir durch die Benennung „Wellenstrahlung" kennzeichnen. Darunter verstehen wir nicht nur rein periodische Wellen, sondern auch Wellen beliebiger Wellenform. Das für die Wellenstrahlung Charakteristische ist die unabänderliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raume.

Zu der so definierten Wellenstrahlung gehören nun die Kathodenstrahlen, von denen wir im vorigen Paragraphen berichteten, nicht. Diesen Strahlen kommt hingegen eine Eigenschaft zu, die den obengenannten Wellenstrahlungen fehlt: sie führen nicht nur Energie, sondern auch Elektrizität mit. Wir wollen eine jede Strahlung, die Elektrizität mitführt, als „Konvektionsstrahlung" bezeichnen. Die Kathodenstrahlen insbesondere stellen einen Strom negativer Elektronen dar. Da wir die Eigenschaften dieser Atome der negativen Elektrizität als unabänderliche ansehen, so bleibt als unterscheidendes Merkmal verschiedener Kathodenstrahlen nur die Geschwindigkeit der Elektronen übrig.

Die Geschwindigkeit der in einer Entladungsröhre zu erzeugenden Kathodenstrahlen hängt, wie wir sahen, von der Spannungsdifferenz der Elektroden ab. Man kann jedoch diese Spannungsdifferenz nicht beliebig wählen, da bei geringen Spannungen die Entladung nicht stattfindet, und da beliebig hohe Spannungen nicht zur Verfügung stehen. Hierdurch ist das „Spektrum" der nach der Geschwindigkeit geordneten Kathodenstrahlen begrenzt. Doch hat Ph. Lenard gezeigt, daß bei Betrachtung eines Metalles mit ultraviolettem Lichte Strahlen ausgesandt werden, welche ähnliche Eigenschaften, nur geringere Geschwindigkeit der Strahlteilchen aufweisen, wie die eigentlichen Kathodenstrahlen. Anderseits hat sich ergeben, daß die Strahlung radioaktiver Körper, und zwar der

Bestandteil der Strahlung, den Rutherford als β-Strahlung bezeichnet hat, magnetisch in demselben Sinne, nur etwas schwächer, ablenkbar ist, wie die Kathodenstrahlen. Es lag nahe, hier negative Elektronen von größerer Geschwindigkeit zu vermuten. In der Tat haben die Untersuchungen von W. Kaufmann, auf die wir später ausführlicher zurückkommen, gezeigt, daß die Geschwindigkeiten der in den β-Strahlen anzunehmenden Elektronen ein kontinuierliches Spektrum darstellen, das sich von $^2/_3$ der Lichtgeschwindigkeit bis nahe an die Lichtgeschwindigkeit selbst heran erstreckt. Noch klafft eine Lücke zwischen den raschesten der messend zu verfolgenden Kathodenstrahlen und den langsamsten β-Strahlen. Wenn diese ausgefüllt sein wird, so wird man eine kontinuierliche Reihe von negativen Konvektionsstrahlungen haben, die von beliebig kleinen Geschwindigkeiten bis nahe an die Lichtgeschwindigkeit heranreicht.

Von positiver Konvektionsstrahlung haben wir bisher nicht gesprochen. Man hat gefunden, daß die leicht absorbierbare Strahlung radioaktiver Körper, die sogenannte α-Strahlung, aus positiv geladenen Teilchen besteht. Auch gewisse, die elektrische Entladung in verdünnten Gasen begleitende Erscheinungen, die Kanalstrahlen E. Goldsteins, hat man auf bewegte positive Teilchen zurückführen zu können geglaubt. Es haben sich für den Quotienten aus Ladung und Masse in beiden Fällen Zahlwerte ergeben, die von der Größenordnung des bei Wasserstoffionen vorliegenden Wertes waren. Doch sind diese positiven Konvektionsstrahlungen noch nicht genügend erforscht, um Schlüsse auf die Natur der positiven Elektrizität zu gestatten. Hat man es hier mit den freien positiven Elektronen zu tun, und ist diesen eine so viel größere Trägheit zuzuschreiben, als den negativen? Oder sind diese Strahlteilchen, wie die Gasionen (§ 1), durch Anlagerung wägbarer Materie an die Elektronen entstanden? Oder ist etwa die positive Elektrizität überhaupt von der Materie nicht zu trennen? Das sind Fragen, deren Erledigung der Zukunft vorbehalten bleiben muß.

In diesem zweiten Bande der „Theorie der Elektrizität“ soll nun die elektromagnetische Strahlung in umfassender Weise behandelt werden, sowohl die Wellenstrahlung, wie die Konvektionsstrahlung. Die Grundlage für die Theorie der Strahlung gewinnen wir, indem wir die atomistischen Vorstellungen über die Konstitution der Elektrizität mit den Faraday-Maxwellschen Ideen über das elektromagnetische Feld vereinigen. Die Vereinigung dieser beiden Vorstellungskreise ist es, die zur modernen Elektronentheorie führt. Man trifft bei manchen Autoren die Auffassung an, daß die atomistischen Ideen in einem gewissen Gegensatze zur Maxwellschen Theorie stünden, und daß die Elektronentheorie eigentlich zu den alten Vorstellungen der Fernwirkungshypothese zurückkehre. Diese Auffassung ist indessen durchaus unzutreffend. Allerdings ist die Hypothese einer atomistischen Struktur der Elektrizität wohl zuerst, insbesondere durch Wilhelm Weber, in einer Weise eingeführt worden, welche den Vorstellungen der Fernwirkungstheorie entsprach. Dieser Forscher stellte ein Elementargesetz für die Wechselwirkung zweier elektrischer Atome an die Spitze und suchte auf dieses die gesamte Elektrodynamik zu begründen. Daß diese Bemühungen Webers und anderer Physiker scheiterten, lag gerade an der Verkoppelung der atomistischen Vorstellung mit der Fernwirkungshypothese, welche die der Atomistik innewohnende Entwickelungsfähigkeit erstickte. Erst die Abwendung von der Fernwirkungstheorie und die Verschmelzung mit der Faraday-Maxwellschen Lehre konnte die atomistischen Keime zur Blüte bringen und für die Elektrizitätslehre fruchtbare Ergebnisse zeitigen.

Die Maxwellsche Theorie, weit entfernt, die Frage nach der Struktur der Elektrizität als unberechtigt zurückzuweisen, ermöglicht vielmehr erst eine allseitige Untersuchung der für diese Frage bedeutungsvollen Erscheinungen. Indem sie das Licht als elektromagnetischen Vorgang betrachtet, lehrt sie, aus der Strahlung einer Lichtquelle Schlüsse auf die Eigenschaften der elektrischen Teilchen zu ziehen, die in den licht-

aussendenden Molekülen schwingen. So hat das Zeemansche Phänomen im Jahre 1896 gezeigt, daß eine große Zahl von Spektrallinien in der Bewegung der negativen Elektronen ihren Ursprung hat. Eine magnetische Zerlegung der Spektrallinien, die auf die Schwingungen positiver Elektronen in der Lichtquelle zurückzuführen wäre, hat sich nicht feststellen lassen; infolge der größeren, diesen Teilchen anhaftenden trägen Masse würde eine solche Zerlegung auch theoretisch unterhalb der Grenze der Beobachtbarkeit liegen. Hier tritt die enge, von der elektromagnetischen Lichttheorie behauptete Beziehung zwischen dem Konvektionsstrome und der Lichtstrahlung deutlich hervor. In der Sprache der Elektronentheorie läßt sich diese Beziehung so formulieren: Die Konvektionsstrahlung ist ein Strom freier Elektronen, die Wellenstrahlung nimmt ihren Ausgang von Geschwindigkeitsänderungen der Elektronen.

Wo die Kathodenstrahlen auf die Röhrenwand treffen, nehmen die Röntgenstrahlen ihren Ursprung. Wir werden, mit G. G. Stokes und E. Wiechert, in diesen magnetisch nicht ablenkbaren Strahlen die elektromagnetischen Wellen sehen, welche von den gehemmten Elektronen ausgehen. Dabei scheint es sich nicht um periodische Wellenzüge, sondern um Einzelimpulse zu handeln, deren Impulsbreite weit kleiner ist als die Wellenlänge der kurzwelligsten ultravioletten Strahlen. Aus den Beugungsversuchen von Haga und Wind hat sich ergeben, daß die Impulsbreite 10^{-8} cm beträgt, falls es sich überhaupt um Wellenimpulse handelt. Doch ist es, da die Röntgenstrahlen sich weder brechen noch spiegeln lassen, schwierig, ihre Wellennatur experimentell festzustellen.

Die dritte, nicht ablenkbare Klasse der Radiumstrahlen, die sogenannten γ-Strahlen, weist Eigenschaften auf, welche denen besonders durchdringender Röntgenstrahlen gleichen. Es liegt nahe, sie als die Wellenimpulse anzusprechen, welche beim Fortschleudern der Elektronen durch die radioaktiven Atome erregt werden.

§ 4. Die Grundgleichungen der Elektronentheorie.

Um zu den Grundgleichungen der Elektronentheorie zu gelangen, gehen wir von den Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie aus (I, § 59, S. 235 ff.). Die erste Hauptgleichung lautet (I, Gl. 177)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathfrak{c},$$

wobei $\mathfrak{c}$ die Dichte des Gesamtstromes ist.

Die Elektronentheorie kennt nur zwei Bestandteile des Gesamtstromes, den Verschiebungsstrom im Äther und den Konvektionsstrom bewegter Elektronen; die Dichte des Verschiebungsstromes im Äther ist gleich

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

die Dichte des elektrostatisch gemessenen Konvektionsstromes ist gegeben durch

$$\mathfrak{i} = \varrho \cdot \mathfrak{v} \quad \text{(vgl. I, Gl. 159, S. 190)},$$

wo ϱ die räumliche Dichte, $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der konvektiv bewegten Elektrizität bezeichnet. Wir wollen der einfacheren Schreibweise wegen es vorziehen, den Konvektionsstrom elektromagnetisch zu messen. Alsdann wird

$$\mathfrak{i} = \frac{\varrho \cdot \mathfrak{v}}{c}, \tag{10}$$

und es ist die erste Grundgleichung zu schreiben

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 4\pi \mathfrak{i}. \tag{I}$$

In der zweiten Hauptgleichung (I, Gl. 178, S. 238) streichen wir die eingeprägte elektrische Kraft. Im leeren Raume, wo $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ ist, nimmt die zweite Hauptgleichung die Form an:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0. \tag{II}$$

Diese beiden Grundgleichungen nehmen wir auch im Innern der Elektronen als gültig an.

Die allgemeine Beziehung zwischen der Dichte der Elektrizität und der Divergenz der elektrischen Verschiebung (vgl. I, Gl. 137, S. 145) behält die Elektronentheorie bei; da sie allgemein $\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}$ setzt, so wird

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi \varrho .$$

Auch die allgemeine Bedingung der Quellenfreiheit des Vektors $\mathfrak{B}$ (I, Gl. 178a, S. 239) wird aus der Maxwellschen Theorie herübergenommen; da $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ identifiziert wird, so wird

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

Für den von Materie und von Elektronen leeren Raum, wo ϱ und $\mathfrak{i}$ verschwinden, stimmen diese Grundgleichungen mit den Hertz-Heavisideschen Feldgleichungen überein; sie führen, wie jene, zu dem Ergebnisse, daß hier ebene elektromagnetische Wellen nach allen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit c forteilen. Auf dasjenige Bezugssystem, in dem diese Isotropie der Wellenfortpflanzung wirklich statthat, sind die Bewegungen der Elektronen zu beziehen. Es wird gestattet sein, die so bestimmt gedachten Bewegungen der Elektronen und der wägbaren Körper als „absolute Bewegungen“ zu bezeichnen (vgl. I, S. 430ff.). Die auf jenes Bezugssystem bezogene absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Elektronen ist es, welche in den Ausdruck (10) für die Dichte des Konvektionsstromes eingeht. Neben dem kinematischen Vektor $\mathfrak{v}$ enthält das System der Feldgleichungen (I) bis (IV) nur zwei Vektoren, den elektrischen Vektor $\mathfrak{E}$ und den magnetischen Vektor $\mathfrak{H}$. Es ist anzusehen als die einfachste Erweiterung des für den Äther geltenden Systemes von Feldgleichungen, welche die eingelagerten Elektronen und ihre Bewegung berücksichtigt.

Zu diesen Feldgleichungen tritt endlich eine Aussage über die an den Volumelementen der Elektronen angreifende Kraft. Es wird, in Übereinstimmung mit Bd. I, Gl. 246a, S. 412, für die auf die Einheit der Ladung wirkende Kraft der Ansatz gemacht

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}].$$

Wir können diesen Ansatz um so eher akzeptieren, als wir ja im § 2 dieses Bandes uns davon überzeugt haben, daß er die Kraft, die in einem gegebenen äußeren Felde auf die Kathodenstrahlteilchen wirkt, in befriedigender Weise darstellt. Der Vektor $\mathfrak{F}$, die „elektromagnetische Kraft pro Einheit der Ladung", ist durch die Grundgleichung (V) auf die drei in den Feldgleichungen auftretenden Vektoren zurückgeführt.

Wir wollen uns davon überzeugen, daß der zugrunde gelegte Ansatz für die elektromagnetische Kraft mit dem Energieprinzipe übereinstimmt. Wir denken uns zu diesem Zwecke einen Bereich v, der von der ruhenden Fläche f begrenzt ist. Auf die im Volumelemente dv enthaltene Elektrizität übt das elektromagnetische Feld die Kraft $\mathfrak{F}\varrho\, dv$ aus. Diese leistet pro Sekunde die Arbeit

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{F})\varrho\, dv = (\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{E})\, dv.$$

Der vom magnetischen Felde herrührende Anteil der Kraft, der stets senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektrizität weist, trägt zur Arbeit nichts bei. Durch Integration über den Bereich v erhalten wir mithin für die Arbeitsleistung der elektromagnetischen Kräfte

$$\frac{dA}{dt} = \int (\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{E})\, dv.$$

Da nun, nach (10), der Vektor $\varrho\mathfrak{v}$ die Dichte des Konvektionsstromes bestimmt, so folgt aus der ersten Grundgleichung

$$\frac{dA}{dt} = c\int (\mathfrak{i}, \mathfrak{E})\, dv = \frac{c}{4\pi}\int dv \left(\mathfrak{E}, \operatorname{curl}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right).$$

Ferner ist, nach einer allgemeinen Regel der Vektorrechnung (I, Gl. 102a, S. 93),

$$\int df [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_\nu = \int dv\, \mathfrak{H} \operatorname{curl}\mathfrak{E} - \int dv\, \mathfrak{E} \operatorname{curl}\mathfrak{H},$$

oder, mit Rücksicht auf die zweite Grundgleichung,

$$\int dv\, \mathfrak{E} \operatorname{curl} \mathfrak{H} = -\frac{1}{c}\int dv\, \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - \int df [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_\nu;$$

dabei stellt ν die äußere Normale der Begrenzungsfläche f vor.

Es folgt also schließlich

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \frac{dv}{8\pi}\left\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\right\} - \int df \frac{c}{4\pi}\left[\mathfrak{E}\mathfrak{H}\right]_\nu. \tag{11}$$

Dieses ist nichts anderes als die Energiegleichung. Setzen wir, in Übereinstimmung mit der Maxwellschen Theorie,

$$W = \int \frac{dv}{8\pi}\left\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\right\} \tag{12}$$

für die elektromagnetische Energie des Raumes und

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathfrak{E}\mathfrak{H}\right] \tag{13}$$

für den elektromagnetischen Energiestrom, so können wir (11) schreiben

$$\frac{dA}{dt} + \int df\, \mathfrak{S}_\nu = -\frac{dW}{dt}.$$

Die Arbeit der elektromagnetischen Kräfte, die in dem Bereiche v wirken, vermehrt um den elektromagnetischen Energiestrom, der durch die Begrenzungsfläche f hinausströmt, ist der Abnahme der elektromagnetischen Energie des Bereiches gleich; Arbeitsleistung der elektromagnetischen Kräfte und Strahlung erfolgen beide auf Kosten der elektromagnetischen Energie W; dabei sind für Energiedichte und Energiestrom die aus der Maxwellschen Theorie bekannten Ausdrücke beizubehalten. Gleichung (11) spricht das Energieprinzip für das elektromagnetische Feld bewegter Elektronen aus. Wie unser Beweis zeigt, folgt dasselbe aus den Grundgleichungen (I) bis (V); es stellt keineswegs eine neue, von den Grundgleichungen unabhängige Aussage dar.

In den allgemeinen Grundgleichungen (I) bis (V) der Elektronentheorie ist die Idee der atomistischen Konstitution der Elektrizität noch nicht zur Formulierung gelangt; diese Grundgleichungen würden es noch zulassen, daß die Elektrizität

kontinuierlich den Raum erfüllte. Die atomistische Hypothese nimmt indessen an, daß die Elektrizität, die positive und die negative, aus Elementarquanten $\pm e$ besteht, die durch den Äther voneinander getrennt sind. Dabei genügt es bisweilen, die Ladungen als Punktladungen aufzufassen, insbesondere, wenn es sich um die vom Elektron entsandte Wellenstrahlung handelt. Doch bringt die Annahme punktförmiger Elektronen gewisse Schwierigkeiten mit sich. Es besitzt nämlich das Feld, welches eine ruhende Ladung von endlichem Betrage umgibt, eine elektrostatische Energie, die unendlich wird, wenn die Ladung sich auf einen Punkt zusammendrängt. Schon diese Erwägung deutet an, und die eingehende Untersuchung bestätigt es, daß die Elektronen, streng genommen, nicht als elektrische Punkte zu betrachten sind, da ja ihre Ladung und ihre Energie endlich sein sollen. Wir können nicht umhin, der Dynamik der Elektronen neben den allgemeinen Grundgleichungen (I) bis (V) noch besondere Voraussetzungen über die Form und Bewegungsfreiheit dieser Teilchen zugrunde zu legen. Doch werden wir hierauf erst im dritten Kapitel dieses Abschnittes eingehen.

Wir haben die Grundgleichungen (I) bis (V) erhalten, indem wir von den allgemeinen Gleichungen der Maxwellschen Theorie ausgingen und diese in gewisser Weise vereinfachten. Es braucht kaum ausdrücklich bemerkt zu werden, daß dieses Verfahren nur ein heuristisches ist und keine Beweiskraft besitzt. Müssen wir doch jedesmal, wenn wir eine auf einem gewissen Gebiete als richtig erkannte Theorie auf ein neues Erscheinungsgebiet anwenden wollen, mit der Möglichkeit rechnen, daß sie diesen neuen Tatsachen gegenüber versagt. Für eine Theorie ist die Eroberung einer neuen Provinz stets ein Unternehmen, das nur der Erfolg rechtfertigen kann.

Die vorgenommene Übertragung der Maxwellschen Gleichungen auf die Felder der Elektronen ist insbesondere auch aus dem Grunde hypothetisch, weil diese Felder niemals einer direkten experimentellen Prüfung zugänglich werden können. Denn die Methode der Untersuchung des Feldes durch einen

Probekörper ist wohl auf die Felder anzuwenden, von denen der erste Band dieses Werkes handelte, aber nicht auf die Felder der Elektronen selbst. Der kleinste denkbare Probekörper ist nämlich, wenn anders die atomistische Vorstellung zutrifft, das Elektron selbst. Das Feld nun, welches das einzelne Elektron umgibt, wechselt natürlich nach Richtung und Stärke beträchtlich in Bereichen von der Größenordnung des Elektrons. Zu seiner Ausmessung würde ein Probekörper notwendig sein, dessen Dimensionen klein gegen diejenigen des Elektrons sind. Es ist also aus prinzipiellen Gründen, von experimentellen Schwierigkeiten ganz abgesehen, das Feld, auf das unsere Grundgleichungen sich beziehen, der direkten Messung unzugänglich. Die Bestätigung der Grundgleichungen muß in dem Zutreffen ziemlich entfernter Folgerungen gesucht werden. Zunächst ist die Übertragung der Grundgleichungen von den der Beobachtung zugänglichen Feldern auf die Felder der Elektrizitätsatome eine durchaus hypothetische.

Eine jede atomistische Theorie muß indessen in entsprechender Weise verfahren. So kann die kinetische Gastheorie nicht umhin, die Bewegung und den Stoß der Gasmoleküle nach Gesetzen zu behandeln, welche der Mechanik der greifbaren Körper entnommen sind. Es kann niemals direkt experimentell nachgewiesen werden, daß die Bewegungen der Moleküle wirklich diesen Gesetzen gehorchen. Die Berechtigung der gemachten Voraussetzungen kann erst nachträglich dadurch geführt werden, daß man ihre Konsequenzen verfolgt und als zutreffend nachweist. Dabei liegt die Sache sogar in der Elektronentheorie insofern günstiger, wie in der Molekulartheorie der Materie, als die Eigenschaften der freien Elektronen selbst in den Kathodenstrahlen und verwandten Strahlungen dem Experimente zugänglich werden, während die regellosen Bewegungen der unelektrischen Atome und Moleküle der direkten Beobachtung unzugänglich und nur in ihren über meßbare Bereiche erstreckten Mittelwerten zu den mechanischen und thermischen Eigenschaften der Materie in Beziehung zu setzen sind.

Die Elektronentheorie beansprucht, die elektrischen, magnetischen und optischen Eigenschaften der Materie in ihrer Gesamtheit darzustellen. Sie geht dabei von gewissen Voraussetzungen über die Eigenschaften der Elektronen in leitenden, dielektrischen und magnetisierbaren Körpern aus und gelangt durch Mittelwertsbildung über Bereiche, die eine sehr große Zahl von Elektronen enthalten, zu den Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper; dabei werden die Beziehungen der elektrischen Verschiebung und der Leitungsstromdichte zur elektrischen Feldstärke, sowie die Beziehung der magnetischen Feldstärke zur magnetischen Induktion anschaulicher gedeutet und in mancher Hinsicht der Erfahrung besser angepaßt als in der rein phänomenologischen Maxwell-Hertzschen Darstellungsweise.

Der erste, der die Grundgedanken der Elektronentheorie klar formuliert und in umfassender und folgerichtiger Weise insbesondere auf optische Fragen angewandt hat, ist H. A. Lorentz gewesen. Er hat die elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung[1]) und die Optik bewegter Körper[2]) von diesem Standpunkte aus entwickelt. Auch die Entdeckung Zeemans ist auf seine Anregung zurückzuführen. Wenn überhaupt die Elektronentheorie, an deren Erfolgen so viele experimentelle und theoretische Physiker Anteil haben, mit dem Namen eines einzelnen Forschers in Verbindung gebracht werden soll, so kann wohl nur der Name von H. A. Lorentz in Frage kommen.

§ 5. Die elektromagnetische Bewegungsgröße.

Wie wir bereits im ersten Bande dieses Werkes (§ 89) erwähnten, besteht hinsichtlich der Beziehung zum dritten Axiome der Newtonschen Mechanik ein gewisser Gegensatz

1) H. A. Lorentz, Ann. d. Phys. 9, S. 641, 1880.

2) H. A. Lorentz, La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants. Leide, E. J. Brill, 1892.

H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden, E. J. Brill, 1895.

zwischen der Maxwell-Hertzschen Theorie einerseits und der Lorentzschen Theorie anderseits. Jene nimmt an, daß die auf einen Körper wirkenden elektromagnetischen Kräfte stets aus gewissen, über seine Oberfläche verteilten Druck- und Zugkräften resultieren, wobei zwar das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung erfüllt ist, aber zuweilen Kräfte auf die Volumelemente des Äthers auftreten. Der Lorentzschen Theorie sind solche Kräfte auf die von Elektrizität leeren Volumelemente des Raumes fremd. Sie läßt elektromagnetische Kräfte nur auf die Elektrizität wirken; die auf die Volumeinheit berechnete elektromagnetische Kraft (V) der Lorentzschen Theorie

$$(14) \qquad \varrho\mathfrak{F} = \varrho\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{H}\right]\right\}$$

verschwindet mit der elektrischen Dichte ϱ.

Wir wollen nunmehr die Konsequenzen verfolgen, die sich aus dieser Auffassung hinsichtlich der Stellung der Elektronentheorie zum dritten Axiome Newtons ergeben.

Wir ziehen, ebenso wie in Bd. I, S. 414, die Identitäten heran

$$(14\text{a}) \qquad \mathfrak{E}_x \operatorname{div}\mathfrak{E} - [\mathfrak{E}\operatorname{curl}\mathfrak{E}]_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z\right),$$

$$(14\text{b}) \qquad \mathfrak{H}_x \operatorname{div}\mathfrak{H} - [\mathfrak{H}\operatorname{curl}\mathfrak{H}]_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z\right).$$

Mit Rücksicht auf die Grundgleichungen (I) und (III) geht

$$\varrho\mathfrak{F} = \varrho\mathfrak{E} + [\mathfrak{i}\mathfrak{H}]$$

über in

$$(14\text{c}) \qquad \varrho\mathfrak{F} = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{E} - \left[\mathfrak{H}, \operatorname{curl}\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\right]\right\}.$$

Anderseits folgt durch Addition von (14a) und (14b), auf Grund von (II) und (IV)

$$(14\text{d})\qquad \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right]_x - \left[\mathfrak{H} \operatorname{curl} \mathfrak{H}\right]_x = 4\pi\left\{\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right\},$$

wobei in einer in der Elastizitätstheorie gebräuchlichen Schreibweise

$$(15)\qquad \begin{cases} 4\pi X_x = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2\right) + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2\right), \\ 4\pi X_y = \mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y, \\ 4\pi X_z = \mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z \end{cases}$$

gesetzt ist. Durch Kombination von (14c) und (14d) erhalten wir

$$4\pi\varrho\mathfrak{F}_x + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right]_x - \frac{1}{c}\left[\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right]_x = 4\pi\left\{\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right\}$$

oder nach Einführung des Poyntingschen Strahlvektors

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathfrak{E}\mathfrak{H}\right] \quad (\text{vgl. Gl. } 13)$$

$$(16)\qquad \varrho\mathfrak{F}_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t}.$$

Entsprechende Gleichungen:

$$\varrho\mathfrak{F}_y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial t},$$

$$\varrho\mathfrak{F}_z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial t},$$

gelten für die beiden anderen Komponenten der elektromagnetischen Kraft.

Wir überzeugen uns unschwer davon, daß die drei ersten Glieder der rechten Seiten die von den Maxwellschen Spannungen auf die Volumeinheit des Raumes ausgeübte Kraft darstellen. In der Tat, setzen wir in den Gleichungen (248) und (249) in § 89 des ersten Bandes, welche bzw. die elektrische und magnetische Flächenkraft darstellen, $\varepsilon = \mu = 1$, so wird

$$(17)\qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}^e + \mathfrak{T}^m = \frac{1}{8\pi}\left\{2\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{E}_\nu + 2\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{H}_\nu - \mathfrak{n}\left(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\right)\right\};$$

dabei stellt $\mathfrak{n}$ einen Einheitsvektor vor, der in Richtung der äußeren Normalen ν der Fläche weist, über welche die Flächenkraft $\mathfrak{T}$ verteilt ist. Die parallel der x-Achse genommene Komponente dieser von den Maxwellschen Spannungen auf die Flächeneinheit einer beliebig gestellten Fläche ausgeübten Kraft ist demnach

$$\mathfrak{T}_x = \frac{1}{8\pi}\left\{2\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_\nu + 2\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_\nu - \cos(\nu x)(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\right\}. \tag{17a}$$

Legt man nun die Normale ν des betrachteten Flächenelementes der Reihe nach parallel der x-Achse, der y-Achse und der z-Achse, so erhält man für $\mathfrak{T}_x$ die durch (15) eingeführten Ausdrücke X_x, X_y, X_z. Diese stellen demnach die parallel der x-Achse genommenen Komponenten der Flächenkraft $\mathfrak{T}$ vor, die auf die Flächeneinheit dreier den Koordinatenebenen paralleler Flächenelemente wirkt; diese drei Größen und die durch zyklische Vertauschung der Koordinaten entstehenden Größen sind mit dem Spannungssysteme identisch, welches Maxwell im elektromagnetischen Felde wirkend annahm; dasselbe ist durch 6 „Stresskomponenten"

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ X_y = Y_x,\ X_z = Z_x,\ Y_z = Z_y$$

charakterisiert. Den Lehren der Elastizitätstheorie gemäß besitzt die von diesen Spannungen auf die Volumeinheit ausgeübte Kraft die Komponenten

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \quad \text{parallel der } x\text{-Achse,}$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \quad \text{parallel der } y\text{-Achse,}$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \quad \text{parallel der } z\text{-Achse.}$$

Nach Maxwell und Hertz sind dieses die auf die Volumeinheit berechneten Komponenten der elektromagnetischen Kraft. Nach Lorentz[1]) ist noch die Kraft

1) H. A. Lorentz, Die elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. 1895. S. 24ff.

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$$

pro Volumeinheit hinzuzufügen, um die gesamte elektromagnetische Kraft $\varrho \cdot \mathfrak{F}$ der Elektronentheorie zu erhalten. Diese Zusatzkraft hebt für die Volumelemente des von Elektrizität leeren Raumes gerade die von den Maxwellschen Spannungen ausgeübte Kraft auf. Wir können dieses Zusatzglied der Anschauung näher bringen, indem wir eine „elektromagnetische Bewegungsgröße" über das Feld mit der Dichte

$$(18) \qquad \mathfrak{g} = \frac{1}{c^2} \cdot \mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi c}\left[\mathfrak{E}\mathfrak{H}\right]$$

verteilt denken.[1]) Dieselbe ist durch die Vektoren $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ bestimmt, für einen jeden Punkt des Feldes. Einer zeitlichen Änderung des Poyntingschen Vektors $\mathfrak{S}$ entspricht eine Änderung der elektromagnetischen Bewegungsgröße, die eine Trägheitskraft

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}$$

hervorruft. Durch diese Trägheitskraft, im Verein mit der über die Oberfläche des betreffenden Bereiches verteilten Flächenkraft $\mathfrak{T}$ (Gl. 17) ist die durch die Grundgleichung (V) definierte elektromagnetische Kraft vollständig zu ersetzen.

In der Tat, integrieren wir die Gleichung (16) über einen Bereich v, der von der ruhenden Fläche f umschlossen ist, so erhalten wir als x-Komponente der resultierenden Kraft

$$\mathfrak{K}_x = \int dv\, \varrho \mathfrak{F}_x$$

$$= \int df \{X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z)\} - \frac{d}{dt}\int \mathfrak{g}_x\, dv.$$

Nach (15) und (17a) ist

$$X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \cdot \left\{2\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_\nu + 2\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_\nu - \cos(\nu x)(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\right\} = \mathfrak{T}_x$$

---

1) M. Abraham, Prinzipien der Dynamik des Elektrons. Ann. d. Phys. 10 (1903). S. 105.

die x-Komponente der Flächenkraft $\mathfrak{T}$. Gehen wir sogleich zur Vektorgleichung über, so erhalten wir

$$\mathfrak{K} = \int dv\, \varrho \mathfrak{F} = \int df\, \mathfrak{T} - \frac{d\mathfrak{G}}{dt}, \tag{19}$$

wobei

$$\mathfrak{G} = \int dv\, \mathfrak{g} = \int dv \cdot \frac{\mathfrak{S}}{c^2} \tag{20}$$

die gesamte, in dem Bereiche v enthaltene elektromagnetische Bewegungsgröße ist.

Die Kraft, welche das elektromagnetische Feld auf einen beliebigen Körper ausübt, ist nach der Lorentzschen Theorie gleich der resultierenden Kraft $\mathfrak{K}$ auf die im Innern des Körpers befindlichen Elektronen. Es besagt daher Gleichung (19): Die resultierende elektromagnetische Kraft auf einen beliebigen Körper ist gleich dem über seine Oberfläche erstreckten Integral der Flächenkraft $\mathfrak{T}$, vermindert um die zeitliche Zunahme der gesamten im Innern des Körpers befindlichen elektromagnetischen Bewegungsgröße.

Wir können die Gleichung (19) auch auf ein System von Körpern anwenden, welche in den Äther eingelagert sind. Wir haben dann im Äther eine Fläche zu konstruieren, welche das ganze System einschließt. Auf dieser Fläche haben wir uns die fingierte Flächenkraft $\mathfrak{T}$ angebracht zu denken; auch haben wir die elektromagnetische Bewegungsgröße sowohl im Innern der Körper, als auch in dem Raume zwischen den Körpern in Rechnung zu ziehen.

Eine besonders einfache Form nimmt der Ausdruck (19) der elektromagnetischen Gesamtkraft an, falls wir die Fläche f, die das Körpersystem umschließt, uns so weit entfernt denken, daß sie in dem ganzen Zeitintervalle, in dem der zu betrachtende Vorgang sich abspielt, nicht von dem elektromagnetischen Felde erreicht wird. Dann verschwindet nämlich auf der Fläche f der Vektor $\mathfrak{T}$, der ja durch die daselbst herrschenden Feldstärken bestimmt ist. Es fällt das erste Glied

im Ausdruck (19) fort, und die elektromagnetische Gesamtkraft wird

$$\mathfrak{K} = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}. \tag{21}$$

Die Gesamtkraft, welche das elektromagnetische Feld auf ein Körpersystem ausübt, ist gleich der zeitlichen Abnahme der elektromagnetischen Bewegungsgröße des gesamten Feldes.

Das System, welches aus den Körpern und dem gesamten elektromagnetischen Felde gebildet ist, können wir als ein in elektromagnetischer Hinsicht abgeschlossenes System bezeichnen. Für ein solches nimmt auch die Energiegleichung (11) eine vereinfachte Form an, da eine Ausstrahlung durch die Begrenzungsfläche f hindurch nicht in Betracht zu ziehen ist. Es wird die gesamte Arbeit der elektromagnetischen Kräfte

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{dW}{dt}. \tag{22}$$

Diese Relation ist es, welche die Bezeichnung des durch (12) definierten Skalars W als „elektromagnetische Energie" rechtfertigt. In entsprechender Weise rechtfertigt die Relation (21) die Bezeichnung des durch (20) definierten Vektors $\mathfrak{G}$ als „elektromagnetische Bewegungsgröße" oder „elektromagnetischer Impuls" des Feldes.

Ist E die gesamte Energie der wägbaren Körper des abgeschlossenen Systemes, so ist der Zuwachs von E der Arbeit der elektromagnetischen Kräfte gleich; es folgt demnach aus (22)

$$E + W = \text{Constans}. \tag{22a}$$

Die Summe aus der Energie der wägbaren Körper und der elektromagnetischen Energie des Feldes ist für ein abgeschlossenes System konstant.

Dieser allgemeinen Fassung des Energieprinzipes können wir eine allgemeine Fassung des Impulssatzes gegenüberstellen. Nach den Lehren der Mechanik ist die zeitliche Zunahme des Gesamtimpulses $\mathfrak{B}$ der wägbaren Massen der Resultierenden der äußeren Kräfte gleich. Da die mechanischen Wechselwirkungen

dem Prinzipe von Wirkung und Gegenwirkung Genüge leisten, so liefern sie zu der resultierenden Kraft keinen Beitrag. Es besagt daher der Impulssatz: Die zeitliche Änderung des mechanischen Impulses $\mathfrak{B}$ ist gleich der resultierenden elektromagnetischen Kraft $\mathfrak{K}$:

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{K}.$$

Setzen wir hier für $\mathfrak{K}$ den in (21) erhaltenen Ausdruck ein und bringen $\mathfrak{G}$ auf die andere Seite, so erhalten wir

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{G} = \text{Constans.} \tag{23}$$

Die Summe aus dem mechanischen Impulse der wägbaren Körper und dem elektromagnetischen Impulse des Feldes ist für ein abgeschlossenes System konstant.

Der so verallgemeinerte Impulssatz ist für das Folgende von fundamentaler Bedeutung. Der gegebene Beweis zeigt, daß die Einführung des elektromagnetischen Impulses ebensowenig eine neue Hypothese darstellt, wie die Einführung einer elektromagnetischen Energie. Es handelt sich hier wie dort nur um einen zweckmäßigen Ausdruck gewisser Folgerungen, die aus dem Ausdrucke der elektromagnetischen Kraft (V) im Verein mit den Feldgleichungen (I) bis (IV) der Elektronentheorie fließen. Wenn nun auch diese Ausdrucksweise der in der Mechanik gebräuchlichen nachgebildet ist, so führt doch, wie schon am Schlusse des ersten Bandes hervorgehoben wurde, die Elektronentheorie zu Folgerungen, welche den Axiomen der Newtonschen Mechanik widersprechen.

Die an den wägbaren Körpern angreifenden elektromagnetischen Kräfte der Lorentzschen Theorie befolgen nicht das dritte Axiom der Newtonschen Mechanik.

Wenn z. B. ein Körper Licht in einer bestimmten Richtung, etwa vermittelst eines Hohlspiegels, auszusenden beginnt, so erfährt die elektromagnetische Bewegungsgröße des Raumes einen Zuwachs. Der Gleichung (21) gemäß wird das Licht

auf den emittierenden Körper eine Kraft ausüben. Diese Wirkung wird erst dann durch eine Gegenwirkung kompensiert werden, wenn das entsandte Licht von anderen Körpern absorbiert wird, und das findet wegen der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes erst nach einer endlichen Zeit statt. Bis dahin bleibt die Bewegungsgröße der Körper ebenso wie die Energie gewissermaßen latent, sie ist in elektromagnetische Bewegungsgröße verwandelt worden.

Daß der Satz von actio und reactio, in dem Sinne der Newtonschen Mechanik gefaßt, von den elektromagnetischen Kräften der Lorentzschen Theorie verletzt wird, ist von H. Poincaré als Einwand gegen diese Theorie geltend gemacht worden.[1] Indessen wird man diesen Einwand nur dann als stichhaltig ansehen, wenn man die Axiome der alten Mechanik als a priori gültig betrachtet. Sieht man hingegen die Physik als eine Wissenschaft an, deren Prinzipien der fortschreitenden Erfahrung anzupassen sind, so wird man sich durch jenen Einwand nicht beirren lassen. Man wird vielmehr die Mechanik des elektromagnetischen Feldes auf den erweiterten Impulssatz (23) begründen und wird untersuchen, ob dieser Satz Folgerungen ergibt, die mit der Erfahrung übereinstimmen; ist dies der Fall, so sind nicht die Grundlagen der Elektronentheorie, sondern die Axiome der alten Mechanik zu revidieren.

Das ist der Weg, der in den folgenden Abschnitten beschritten werden soll; wir werden zeigen, daß sowohl für die Theorie der Konvektionsstrahlung, wie für diejenige der Wellenstrahlung die Einführung der durch den Strahlvektor bestimmten elektromagnetischen Bewegungsgröße fruchtbar ist, und werden in der Bestätigung der so gewonnenen Ergebnisse durch das Experiment eine Rechtfertigung der Grundhypothesen der Elektronentheorie erblicken dürfen.

Nach (18) ist die Dichte $\mathfrak{g}$ der elektromagnetischen Bewegungsgröße dem durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit dividierten Strahlvektor $\mathfrak{S}$ gleich zu setzen. Für eine

1) H. Poincaré, Arch. Néerland. (2) 5, S. 252. 1900.

ebene Lichtwelle weist also der Vektor $\mathfrak{s}$ in Richtung der Wellennormalen; da der Betrag S des Strahlvektors der Energie gleich ist, die in der Sekunde auf die Flächeneinheit einer senkrecht zum Strahle gestellten Fläche fällt (vgl. I, S. 311), und da diese Energie einen Zylinder von der Höhe c erfüllt, so ist

$$\frac{1}{c^2} \cdot S \cdot c = \frac{S}{c}$$

der Betrag der in der Sekunde auf eine ruhende Fläche fallenden Bewegungsgröße. Die pro Sekunde auffallende Bewegungsgröße einer ebenen Lichtwelle ist also gleich der pro Sekunde auffallenden Energie, dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit, oder gleich der Energiedichte.

Fällt nun die Welle auf eine ruhende schwarze Fläche, welche die elektromagnetische Energie der Welle in Wärme verwandelt, so wird auch die elektromagnetische Bewegungsgröße vernichtet und in mechanische Bewegungsgröße verwandelt. Mit anderen Worten, das Licht übt auf die absorbierende Fläche einen Druck aus. Der Lichtdruck beträgt für eine senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung gestellte schwarze Fläche $\frac{S}{c}$; er ist der Energiedichte der Welle gleich. Er wirkt auf die absorbierende schwarze Fläche in Richtung des auffallenden Strahles.

Eine entsprechende, der Strahlrichtung entgegenweisende Druckkraft muß wirksam werden, wenn das Licht von der Lichtquelle in den Raum hinausgesandt und dadurch elektromagnetische Bewegungsgröße erzeugt wird.

Wir haben hier die Ableitung des Lichtdruckes an den zweiten Term im Ausdrucke (19) der resultierenden elektromagnetischen Kraft angeknüpft, welcher die Bewegungsgröße enthält. Den ersten Term beseitigten wir, indem wir die Begrenzungsfläche f des Feldes beliebig weit fortrücken ließen. Wir können nun auch anders verfahren. Wir können die Fläche so legen, daß sie sich unmittelbar an den Körper anschmiegt, auf den die gesuchte elektromagnetische Kraft wirkt.

Dann sind im allgemeinen beide Glieder zu berücksichtigen, sowohl die von den Maxwellschen Spannungen ausgeübte Kraft, als auch die Rückwirkung der elektromagnetischen Bewegungsgröße, die ins Innere des Körpers tritt. In manchen Fällen indessen fällt das zweite Glied fort. Haben wir es beispielsweise mit einem Körper zu tun, der mit einer schwarzen, das Licht vollkommen absorbierenden Hülle bedeckt ist, so tritt von außen her kein Licht und keine elektromagnetische Bewegungsgröße in den Körper. Es wird die Energie des Lichtes bereits an der Oberfläche in Wärme verwandelt. Hier erhält man den vollständigen Wert der vom Lichte ausgeübten Kraft, indem man ausschließlich die Oberflächenkraft $\mathfrak{T}$ der Maxwellschen Spannungen in Rechnung zieht.

In einer ebenen Lichtwelle steht der elektrische Vektor senkrecht auf dem magnetischen; die elektrische Energiedichte ist der magnetischen gleich. Der Faraday-Maxwellsche Längszug der elektrischen Kraftlinien hebt den ihm parallelen magnetischen Querdruck, der Längszug der magnetischen Kraftlinien den entsprechenden elektrischen Querdruck auf; denn diese Druck- bzw. Zugspannungen sind (vgl. I, S. 416) der elektrischen bzw. der magnetischen Energiedichte gleich. Parallel der Strahlrichtung hingegen, die sowohl auf $\mathfrak{E}$ wie auf $\mathfrak{H}$ senkrecht steht, verstärken sich die beiden Querdrucke und ergeben einen Druck auf eine senkrecht gestellte schwarze Fläche, der gleich der elektromagnetischen Energiedichte ist. Das Resultat dieser Betrachtung führt zu demselben Werte des Lichtdruckes, wie die obige Ableitung aus der elektromagnetischen Bewegungsgröße.

Maxwell selbst war es, der aus seinem Spannungssysteme zuerst den Lichtdruck ableitete. In den letzten Jahren ist es den Bemühungen geschickter Experimentatoren, nämlich P. Lebedew[1]), sowie E. F. Nichols und G. F. Hull[2]) gelungen,

1) P. Lebedew, Ann. d. Phys. 6, S. 433. 1901.

2) E. F. Nichols und G. F. Hull, Ann. d. Phys. 12, S. 225. 1903.

experimentell den Lichtdruck als vorhanden nachzuweisen. Auf die Beziehungen des Strahlungsdruckes zur Theorie der Wärmestrahlung kommen wir weiter unten zurück.

Wir wollen schließlich noch zeigen, daß der zweite Impulssatz (vgl. I, § 12) sich in entsprechender Weise verallgemeinern läßt, wie der erste. Wir berechnen das resultierende Moment der elektromagnetischen Kräfte, die auf einen gegebenen Bereich v wirken:

$$\mathfrak{N} = \int dv\, [\mathfrak{r}, \varrho \mathfrak{F}]. \tag{24}$$

Wir verstehen unter $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor, der von einem im Raume festen Punkte aus zu konstruieren ist. Auf diesen festen Momentenpunkt ist das Moment der elektromagnetischen Kräfte bezogen.

Durch Einführung der Ausdrücke (16) ergibt sich beispielsweise für die x-Komponente des Vektors $\mathfrak{N}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_x &= \int dv \{y \cdot \varrho \mathfrak{F}_z - z \cdot \varrho \mathfrak{F}_y\} \\ &= \int dv \left\{ y\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\right\} \\ &\quad - \int dv \left\{ y \frac{\partial \mathfrak{g}_z}{\partial t} - z \frac{\partial \mathfrak{g}_y}{\partial t}\right\}.\end{aligned}$$

Das erste, von den Maxwellschen Spannungen herrührende Volumintegral formen wir auf Grund des Gaußschen Satzes um, wobei wir die aus (15) folgende Beziehung beachten

$$Y_z = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z\right\} = Z_y.$$

Alsdann ergibt sich das über die Begrenzungsfläche f erstreckte Integral

$$\begin{aligned}\int df \Big\{ & y\Big(Z_x \cos(\nu x) + Z_y \cos(\nu y) + Z_z \cos(\nu z)\Big) \\ & - z\Big(Y_x \cos(\nu x) + Y_y \cos(\nu y) + Y_z \cos(\nu z)\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Die Ausdrücke, mit denen hier z und y multipliziert erscheinen, sind, wie aus (15) folgt, nichts anderes als die y- bzw. z-Komponente des durch (17) bestimmten Vektors $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T}_y = \frac{1}{8\pi}\left\{2\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_\nu + 2\mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_\nu - \cos(\nu y)\,(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\right\},$$

$$\mathfrak{T}_z = \frac{1}{8\pi}\left\{2\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_\nu + 2\mathfrak{H}_z\mathfrak{H}_\nu - \cos(\nu z)\,(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\right\}.$$

Der erste Term im Ausdruck von $\mathfrak{N}_x$ ist daher

$$\int df\{y\mathfrak{T}_z - z\mathfrak{T}_y\},$$

d. h. er stellt die x-Komponente des statischen Momentes der an der Begrenzungsfläche angreifenden Flächenkraft $\mathfrak{T}$ dar. Das zweite Integral im Ausdruck von $\mathfrak{N}_x$ hingegen hängt mit der x-Komponente des statischen Momentes der über das Feld mit der Dichte $\mathfrak{g}$ verteilten elektromagnetischen Bewegungsgröße zusammen. Dieses Moment ist

$$\mathfrak{P} = \int dv\,[\mathfrak{r}\mathfrak{g}]. \tag{25}$$

Wir können es, nach Analogie des Impulsmomentes $\mathfrak{U}$ wägbarer Massen (vgl. I, S. 32) als „elektromagnetisches Impulsmoment“ bezeichnen; wir beziehen es, ebenso wie das Kraftmoment $\mathfrak{N}$, auf einen absolut festen Bewegungspunkt, so daß $\mathfrak{r}$ von der Zeit unabhängig wird. Alsdann gilt

$$\frac{d\mathfrak{P}_x}{dt} = \int dv\left\{y\frac{\partial\mathfrak{g}_z}{\partial t} - z\frac{\partial\mathfrak{g}_y}{\partial t}\right\}.$$

Wir erhalten daher schließlich

$$\mathfrak{N} = \int df\,[\mathfrak{r}\mathfrak{T}] - \frac{d\mathfrak{P}}{dt}. \tag{26}$$

Diese Relation entspricht vollkommen der Relation (19). Sie stellt das resultierende Kraftmoment $\mathfrak{N}$ dar als Vektorsumme zweier Glieder: des resultierenden Momentes der an der Oberfläche des Bereiches angreifenden Flächenkraft $\mathfrak{T}$ der Maxwellschen Spannungen und der zeitlichen Abnahme des elektromagnetischen Impulsmomentes.

Rücken wir wieder die Begrenzungsfläche f des Feldes so weit ab, daß auf ihr die Feldstärken gleich Null sind, so wird

$$\mathfrak{N} = -\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}. \tag{26a}$$

Das resultierende Kräftepaar, welches das elektromagnetische Feld auf ein Körpersystem ausübt, ist gleich der zeitlichen Abnahme des elektromagnetischen Impulsmomentes des gesamten Feldes.

Da die Kräftepaare, welche die Körper infolge ihrer mechanischen Wechselwirkung aufeinander ausüben, dem Prinzipe von Wirkung und Gegenwirkung allgemein Genüge leisten, so ist die zeitliche Änderung des gesamten Impulsmomentes $\mathfrak{U}$ der wägbaren Massen dem resultierenden Momente der elektromagnetischen Kräfte gleich zu setzen. Aus

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \mathfrak{N}$$

folgt aber nach (26a) sofort

$$\mathfrak{U} + \mathfrak{Y} = \text{Constans.} \tag{27}$$

Die Summe aus dem mechanischen Impulsmomente der wägbaren Körper und dem elektromagnetischen Impulsmomente des Feldes ist für ein abgeschlossenes System konstant.

Damit haben wir auch den verallgemeinerten zweiten Impulssatz aus den Grundgleichungen der Elektronentheorie hergeleitet. Aus ihm folgt für die Kräftepaare dasselbe, was aus (23) für die elektromagnetischen Wechselwirkungen der Körper bezüglich der Kräfte folgte: *Die Kräftepaare, welche die Körper infolge ihrer elektromagnetischen Wechselwirkung aufeinander ausüben, widersprechen im allgemeinen dem Prinzipe von Wirkung und Gegenwirkung.*

Die verallgemeinerten Impulssätze (23) und (27) und die verallgemeinerte Energiegleichung (22a) sind die Grundlagen, auf denen die Mechanik des elektromagnetischen Feldes sich aufbaut.

§ 6. Die elektromagnetischen Potentiale.

Das Grundproblem der Elektronentheorie können wir folgendermaßen formulieren: Gegeben sei der Anfangszustand des Feldes zur Zeit $t = 0$, und außerdem, für $t > 0$, die Lage und die Bewegung der Elektrizität. Welches ist das elektromagnetische Feld? Es handelt sich also um die Integration der Feldgleichungen (I) bis (IV), bei gegebener anfänglicher Verteilung der Felder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, wenn ϱ und $\mathfrak{i}$ für $t > 0$ als Funktionen von Ort und Zeit gegeben sind. Ist das elektromagnetische Feld bekannt, so ist durch (V) die elektromagnetische Kraft bestimmt, welche das Feld auf die Elektronen ausübt; durch (12) und (13) bestimmen sich ferner Energie und Energiestrom; der für den letzteren maßgebende Poyntingsche Vektor ist durch (20) mit der elektromagnetischen Bewegungsgröße verknüpft.

Für stationäre Zustände, wo die Differentialquotienten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ nach der Zeit in (I) und (II) fortfallen, vereinfacht sich die Bestimmung des Feldes. Es wird das elektrische Feld von dem magnetischen unabhängig; das wirbelfreie elektrische Feld ist durch die Quellenverteilung ϱ, das quellenfreie magnetische Feld durch die Wirbelverteilung $\mathfrak{i}$ bestimmt. Die Integration der Gleichungen, die einerseits $\mathfrak{E}$ mit ϱ, anderseits $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{i}$ verknüpfen, läßt sich in diesem Falle auf Grund der allgemeinen Theorie der Vektorfelder lösen, die im ersten Abschnitte des ersten Bandes dargelegt wurde. Das konstante elektrische Feld wird aus dem elektrostatischen Potentiale, das magnetische Feld des stationären elektrischen Stromes aus dem Vektorpotentiale abgeleitet. Durch Einführung dieser Hilfsgrößen läßt sich die Integration der Feldgleichungen in übersichtlicher Weise durchführen, wie wir im ersten Bande gesehen haben.

Es liegt der Versuch nahe, das allgemeine Integrationsproblem, das jetzt vorliegt, durch Einführung ähnlicher Hilfsgrößen zu vereinfachen. Die vierte Grundgleichung lehrt, daß $\mathfrak{H}$ stets quellenfrei ist; wir genügen ihr, indem wir allgemein

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A} \tag{28}$$

setzen. Von diesem allgemeineren Vektorpotential dürfen wir freilich nicht verlangen, daß seine Divergenz, wie diejenige des Vektorpotentiales des stationären Feldes (I, § 26), allgemein gleich Null ist.

Die Einführung von (28) in die zweite Grundgleichung ergibt

$$\operatorname{curl}\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right\} = 0.$$

Es muß demnach $\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ als negativer Gradient eines Skalars Φ sich darstellen lassen; daraus folgt für $\mathfrak{E}$ der Ausdruck

$$\mathfrak{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}. \tag{29}$$

Für konstante Felder fällt der Differentialquotient von $\mathfrak{A}$ nach der Zeit fort und Φ reduziert sich auf das elektrostatische Potential.

Den Grundgleichungen (II) und (IV) haben wir genügt, indem wir $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ durch (28) und (29) darstellten. Es handelt sich nun darum, den Skalar Φ und den Vektor $\mathfrak{A}$ so zu bestimmen, daß auch die Grundgleichungen (I) und (III) erfüllt sind. Wir erhalten als allgemeinste Bedingung hierfür die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 4\pi\,\mathfrak{i}, \\ -\operatorname{div}\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{A} \qquad &= 4\pi\,\varrho. \end{aligned}$$

Ziehen wir die Rechnungsregeln (ξ) und (ϱ) unserer Formelzusammenstellung am Ende von Band I (S. 438) heran, so können wir die zweite dieser Gleichungen schreiben

$$-\nabla^2\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{A} = 4\pi\,\varrho,$$

und die erste

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{A}\right\} = 4\pi\,\mathfrak{i}.$$

Wir erfüllen beide Gleichungen, indem wir für Φ und $\mathfrak{A}$ die partiellen Differentialgleichungen vorschreiben:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 4\pi\varrho, \tag{30a}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathfrak{A} = 4\pi\mathfrak{k}. \tag{30b}$$

Für ein stationäres Feld werden Φ und $\mathfrak{A}$ unabhängig voneinander; Φ geht in das skalare Potential des elektrostatischen Feldes, $\mathfrak{A}$ in das Vektorpotential des magnetischen Feldes über. Die allgemeinen, durch die Differentialgleichungen (30, 30a, 30b) definierten Potentiale bezeichnen wir als „elektromagnetische Potentiale", und zwar nennen wir Φ das „skalare elektromagnetische Potential", $\mathfrak{A}$ das „elektromagnetische Vektorpotential". Durch diese Benennung bringen wir zum Ausdruck, daß die allgemeineren Potentiale zur Verwendung gelangen, wenn es sich um einen zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Vorgang handelt, bei welchem elektrisches und magnetisches Feld durch die Grundgleichungen miteinander verkettet sind.

Wir werden uns zunächst mit der Integration der Differentialgleichungen (30a, b) beschäftigen, in denen Φ und $\mathfrak{A}$ getrennt auftreten. Wir werden uns dann davon überzeugen, daß die erhaltene Lösung von (30a, b) auch (30) befriedigt. Wir sehen jetzt schon ohne weiteres ein, daß die rechten Seiten von (30a, b) nicht unabhängig voneinander sind; in der Tat, aus (I) und (III) folgt

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{k} = 0. \tag{30c}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die pro Zeiteinheit in ein Volumelement eintretende Menge von Elektrizität dem Zuwachs der elektrischen Dichte entspricht, d. h. daß Elektrizität nicht neugeschaffen oder vernichtet werden kann. Diese „Kontinuitätsbedingung der Elektrizität" ist es, die ϱ und $\mathfrak{k}$ miteinander verknüpft. Die Abhängigkeit der rechten Seiten

von (30a) und (30b) bringt es, wie wir weiter unten sehen werden, mit sich, daß die elektromagnetischen Potentiale der einschränkenden Bedingung (30) allgemein Genüge leisten.

Wir gehen jetzt dazu über, die Differentialgleichung des skalaren elektromagnetischen Potentiales zu integrieren. Es ist zweckmäßig, eine neue Variable

$$l = ct$$

einzuführen; diese ist nichts anderes, als der in der Zeit t von einer Lichtwelle zurückgelegte Weg. Dann schreibt sich (30a)

(31) $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial l^2} - \nabla^2 \Phi = 4\pi \varrho.$$

Wir denken uns, zur Zeit $t = 0$, Φ und $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ als Funktionen des Ortes gegeben, also etwa

(31a) $$\Phi = f(x, y, z) \text{ für } l = 0,$$

(31b) $$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = g(x, y, z) \text{ für } l = 0.$$

Außerdem ist natürlich, für $l > 0$, ϱ als Funktion von Zeit und Ort gegeben.

Es ist unser Ziel, für positive Zeiten Φ als Funktion von Ort und Zeit zu ermitteln; dieses Ziel haben wir erreicht, wenn es uns gelingt, für einen beliebigen Aufpunkt Φ als Funktion von l zu berechnen. Wir greifen einen Aufpunkt P heraus und konstruieren um P als Mittelpunkt eine Schar von Kugeln mit dem veränderlichen Radius r. Wir verstehen unter $d\omega$ den körperlichen Winkel, unter dem das Flächenelement $r^2 d\omega$ einer solchen Kugel vom Mittelpunkte P aus gesehen wird. Die Funktion Φ, welche der partiellen Differentialgleichung (31) genügen soll, ist eine Funktion von vier Variabeln: r, l und zwei Winkeln; die letzteren beiden Variabeln gehen in den Ausdruck von $d\omega$ ein. Die nunmehr einzuführende Hilfsfunktion

(32) $$\Omega = \frac{r}{4\pi} \int \Phi \, d\omega$$

hängt mithin nur von den Variabeln r und l ab; sie ergibt, durch r dividiert, den für eine Kugel vom Radius r berech-

neten Mittelwert von Φ. Wir wollen die Gleichung (31) in eine partielle Differentialgleichung für Ω umformen.

Wir wenden zu diesem Zwecke den Gaußschen Satz auf eine jener Kugeln an. Das über ihr Inneres erstreckte Integral von $\nabla^2\Phi = \operatorname{div}\nabla\Phi$ ist diesem Satze zufolge gleich dem über die Oberfläche erstreckten Integral der Normalkomponente $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ des Vektors $\nabla\Phi$; demnach gilt

$$\int_0^r dr\, r^2 \int \nabla^2\Phi\, d\omega = r^2 \int \frac{\partial\Phi}{\partial r} d\omega = r^2 \frac{\partial}{\partial r}\int \Phi\, d\omega.$$

Durch Differentiation nach r folgt

$$r^2 \int \nabla^2\Phi\, d\omega = \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\int \Phi\, d\omega = 2r\frac{\partial}{\partial r}\int \Phi\, d\omega + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\int \Phi d\omega,$$

oder

$$r\int \nabla^2\Phi\, d\omega = 2\frac{\partial}{\partial r}\int \Phi d\omega + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\int \Phi\, d\omega = \frac{\partial^2}{\partial r^2} r\int \Phi\, d\omega.$$

Wir erhalten also

$$\text{(32a)} \qquad \frac{r}{4\pi}\int \nabla^2\Phi\, d\omega = \frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}.$$

Dividieren wir nun (31) durch $4\pi r$ und integrieren über eine Kugelfläche vom Radius r, so folgt

$$\text{(33)} \qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2} - \frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} = \chi(r, l),$$

wo abkürzungsweise

$$\text{(33a)} \qquad \chi(r, l) = r\int \varrho\, d\omega$$

gesetzt ist. Da ϱ als Funktion von Zeit und Ort gegeben ist, so ist χ für $l \geqq 0$ und $r \geqq 0$ als bekannt anzusehen. Ferner sind auf Grund von (31a, b)

$$\left.\begin{aligned} &\text{(33b)} \quad \Omega = \frac{r}{4\pi}\int f(x, y, z)\, d\omega = F(r) \\ &\text{(33c)} \quad \frac{\partial\Omega}{\partial l} = \frac{r}{4\pi}\int g(x, y, z)\, d\omega = G(r) \end{aligned}\right\} \text{ für } \left\{\begin{aligned} &l = 0 \\ &r \geqq 0 \end{aligned}\right.$$

gegeben.

Ist es gelungen, die Hilfsgleichung (33) zu lösen, so ist der gesuchte Wert von Φ im Mittelpunkte P der Kugelschar unschwer zu ermitteln. Er ist nach (32)

$$\Phi(0, l) = \lim_{r=0} \left(\frac{\Omega}{r}\right). \tag{34}$$

Das Problem, Φ für einen beliebigen Aufpunkt zu berechnen, ist somit auf die Aufgabe zurückgeführt, die Hilfsgleichung (33) unter den angegebenen Bedingungen zu integrieren.

§ 7. Integration einer Hilfsgleichung.

Die Funktionen $\chi(r, l)$, $F(r)$ und $G(r)$ sind durch (33a, b, c) zwar für positive Werte von r definiert, aber nicht für negative; für $r = 0$ verschwinden sie. Es steht uns somit frei, die Definition dieser Funktionen folgendermaßen auf negative Werte von r auszudehnen:

$$\chi(-r, l) = -\chi(+r, l), \tag{35}$$

$$F(-r) = -F(+r), \tag{35a}$$

$$G(-r) = -G(+r). \tag{35b}$$

Auf Grund dieser Daten soll nun die Aufgabe behandelt werden, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial l^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} = \chi(r, l) \tag{36}$$

zu integrieren, d. h. $\Omega(r, l)$ für $l > 0$ und für beliebige positive und negative Werte von r zu berechnen, wenn

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= F(r) \quad &(36a)\\ \frac{\partial \Omega}{\partial l} &= G(r) \quad &(36b) \end{aligned}\right\} \text{ für } l = 0$$

gegeben sind.

Wir erledigen die gestellte Aufgabe, indem wir das Riemannsche Integrationsverfahren auf die nichthomogene partielle Differentialgleichung (36) anwenden.[1])

1) Vgl. hierzu Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Braunschweig 1901. Bd. II, § 90, S. 224 ff. A. Sommerfeld, Enzyklopädie der mathem. Wissensch. Art. II A. 7 c. Nr. 13.

Wir denken uns die unabhängigen Veränderlichen r und l als Abszisse und Ordinate aufgetragen. Die Anwendung des Stokesschen Satzes auf ein beliebiges Flächenstück der (r, l)-Ebene ergibt

$$\iint dr\,dl \left\{ \frac{\partial \mathfrak{Z}_l}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_r}{\partial l} \right\} = \int ds\, \mathfrak{Z}_s.$$

Dabei stellt $\mathfrak{Z}$ einen zunächst beliebigen Vektor dar. Das Integral zur Linken ist über das betreffende Flächenstück, das Integral zur Rechten über die Begrenzungskurve zu erstrecken, derart, daß der Umlaufssinn einer positiven Drehung um die dritte, der r- und l-Achse sich zuordnende Achse eines rechtshändigen Koordinatensystemes entsprechen würde. Wir setzen nun

$$\mathfrak{Z}_r = \frac{\partial \Omega}{\partial l}, \quad \mathfrak{Z}_l = \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

und erhalten

$$\iint dr\,dl \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial l^2} \right\} = \int ds \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial l} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial l}{\partial s} \right\}. \tag{37}$$

Wir wenden diese Formel auf ein gleichschenkliges Dreieck ABC an, dessen Grundlinie AB auf der r-Achse liegt, während die Spitze C auf der Seite der positiven l gelegen ist (vgl. Abb. 1). Es seien a, b die Abszissen der Punkte A, B. Die Winkel der Schenkel AC, BC mit der Grundlinie seien gleich einem halben Rechten, so daß

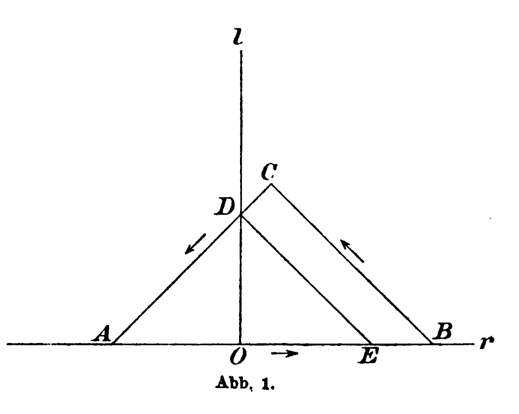


Abb. 1.

$$\begin{aligned} r - l &= a \quad \text{die Gleichung der Geraden } AC, \\ r + l &= b \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad BC \end{aligned} \tag{37a}$$

ist. Alsdann ist längs AC

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial l}{\partial s},$$

hingegen längs BC

$$\frac{\partial r}{\partial s} = -\frac{\partial l}{\partial s}.$$

Auf AB aber ist

$$\frac{\partial l}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial s} = 1, \quad \text{und, nach (36b),} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial l} = G(r).$$

Es ist daher

$$\int\limits_A^B ds \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial r}\frac{\partial l}{\partial s} \right\} = \int\limits_a^b G(r)\,dr,$$

$$\int\limits_B^C ds \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial r}\frac{\partial l}{\partial s} \right\} = -\int\limits_B^C ds\,\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \Omega_B - \Omega_C,$$

$$\int\limits_C^A ds \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial r}\frac{\partial l}{\partial s} \right\} = +\int\limits_C^A ds\,\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \Omega_A - \Omega_C.$$

Folglich wird die rechte Seite von (37)

$$\int\limits_a^b G(r)\,dr + \Omega_A + \Omega_B - 2\,\Omega_C.$$

Verstehen wir jetzt unter r, l die Koordinaten des Punktes C, so ist

$$\Omega_C = \Omega(r, l)$$

die gesuchte Funktion.

Der Punkt A hat nach (37a) die Koordinaten

$$a = r - l,\ 0,$$

der Punkt B hingegen die Koordinaten

$$b = r + l,\ 0.$$

Aus (36a) folgt daher

$$\Omega_A = \Omega(r - l, 0) = F(r - l),$$

$$\Omega_B = \Omega(r + l, 0) = F(r + l),$$

und es ist die rechte Seite von (37) zu schreiben

$$\int_{r-l}^{r+l} G(r)\,dr + F(r-l) + F(r+l) - 2\Omega(r,l).$$

Die linke Seite aber wandelt sich, durch Einführung der partiellen Differentialgleichung (36), in das über das Dreieck ABC erstreckte Flächenintegral der Funktion $-\chi(r,l)$ um. Es wird also schließlich

$$(38)\quad 2\Omega(r,l) = F(r-l) + F(r+l) + \int_{r-l}^{r+l} G(r)\,dr + \iint_{ABC} \chi(r,l)\,dr\,dl.$$

Damit ist die Integration der Hilfsgleichung (36) in allgemeinster Weise durchgeführt.

Die Funktionen $F(r)$, $G(r)$, $\chi(r,l)$ waren zunächst nur für positive Werte von r gegeben. Für negative Werte dieser Variabeln wurde ihre Definition durch die Gleichungen (35, 35a, b) gegeben. Wir können daher schreiben

$$F(r-l) = -F(l-r),$$

$$\int_{r-l}^{r+l} G(r)\,dr = \int_{0}^{r+l} G(r)\,dr - \int_{0}^{l-r} G(r)\,dr = \int_{l-r}^{l+r} G(r)\,dr.$$

Was aber das über das Dreieck ABC der Abb. 1 erstreckte Flächenintegral anbelangt, so ist dasselbe nach (35b)

$$\iint_{ABC} \chi(r,l)\,dr\,dl = \iint_{OBCD} \chi(r,l)\,dr\,dl - \iint_{OED} \chi(r,l)\,dr\,dl.$$

Dabei ist OED das Dreieck, welches dem auf der Seite der negativen r gelegenen Teile OAD des Dreieckes ABC spiegelbildlich (in bezug auf die l-Achse) entspricht. Es bleibt also schließlich nur das über den Streifen $BCDE$ erstreckte Integral von $\chi(r,l)$ übrig:

$$\iint_{ABC} \chi(r,l)\,dr\,dl = \iint_{BCDE} \chi(r,l)\,dr\,dl.$$

Demnach erhalten wir

$$\text{(38a)} \qquad \frac{\Omega(r,l)}{r} = \frac{F(l+r) - F(l-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \cdot \int_{l-r}^{l+r} G(r)\,dr + \frac{1}{2r} \cdot \iint_{BCDE} \chi(r,l)\,dr\,dl.$$

Der Limes, dem dieser Ausdruck mit verschwindendem r zustrebt, bestimmt nach (34) den gesuchten Wert des skalaren Potentiales im Aufpunkte.

Der Grenzwert der beiden ersten Glieder läßt sich sofort angeben; es ist

$$\text{(38b)} \qquad \lim_{r=0} \left\{ \frac{F(l+r) - F(l-r)}{2r} \right\} = F'(l),$$

$$\text{(38c)} \qquad \lim_{r=0} \frac{1}{2r} \cdot \int_{l-r}^{l+r} G(r)\,dr = G(l).$$

Was aber das dritte Glied anbelangt, so ist zu beachten, daß r die Abszisse des Punktes C in Abb. 1 ist. Dem Grenzübergang zu verschwindendem r entspricht ein Hereinrücken des Punktes C in die l-Achse, wobei $OB = l$ wird. Ist λ die Abszisse eines Punktes der Geraden CB, so ist in der Grenzlage seine Ordinate gleich $(l - \lambda)$. Folglich gilt in der Grenzlage des Dreieckes für die Punkte der Geraden CB

$$\chi(r,l) = \chi(\lambda, l - \lambda), \quad \text{wo} \quad 0 \leqq \lambda \leqq l.$$

Auf einen dieser Geraden anliegenden schmalen Streifen von der Breite $CD = r \cdot \sqrt{2}$ geht mit verschwindendem r das Gebiet $BCDE$ über, über welches das Flächenintegral in (38a) zu erstrecken war. Wir erhalten demnach

$$\lim_{r=0} \frac{1}{2r} \iint_{BCDE} \chi(r,l)\,dr\,dl = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_C^B \chi(\lambda, l - \lambda)\,ds;$$

dabei stellt ds ein Element der Geraden CB vor, die unter 45^0 gegen die Abszissenachse geneigt ist; die Variable λ aber war die Abszisse der Punkte von CB. Demnach ist

und es wird

$$ds = d\lambda \cdot \sqrt{2},$$

(38d)
$$\lim_{r=0} \frac{1}{2r} \iint\limits_{BCDE} \chi(r, l)\, dr\, dl = \int_0^l d\lambda\, \chi(\lambda, l - \lambda).$$

Die Grenzwerte (38b, c, d) der drei Glieder in (38a) zusammenfassend, erhalten wir

$$\lim_{r=0} \left\{ \frac{\Omega(r, l)}{r} \right\} = F'(l) + G(l) + \int_0^l d\lambda\, \chi(\lambda, l - \lambda).$$

Der Wert der gesuchten Funktion Φ in dem Aufpunkte P wird daher, mit Rücksicht auf (33a) und (34),

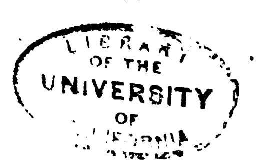
(39)
$$\Phi(0, l) = F'(l) + G(l) + \int_0^l \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \varrho(\lambda, l - \lambda).$$

Nunmehr haben wir die Integration der für das skalare elektromagnetische Potential geltenden partiellen Differentialgleichung (31) durchgeführt.[1]) Die Funktionen F und G bestimmen sich, gemäß (33b, c), aus den gegebenen Anfangswerten (31a, b) von Φ und $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$. Die beiden ersten Glieder von (39) formulieren demnach den Einfluß des Anfangszustandes, während das dritte Glied ausgewertet werden kann, wenn die Elektrizitätsverteilung in ihrer Abhängigkeit von Zeit und Ort gegeben ist.

§ 8. **Die Fortpflanzung elektromagnetischer Störungen.**

Die Formel (39) löst die partielle Differentialgleichung (30a); sie bestimmt das skalare elektromagnetische Potential Φ, wenn die Anfangswerte von Φ und $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ bekannt sind, und wenn weiterhin die Elektrizitätsverteilung ϱ als Funktion der

1) Die gegebene Ableitung schließt sich an die von H. Weber für den Fall $\varrho = 0$ angewandte Methode an. Vgl. Riemann-Weber l. c. Bd. II, § 120, S. 302 ff. und M. Abraham. Acc. dei Lincei (5) 14[1], S. 7. 1905.



Zeit gegeben ist. Die Differentialgleichung (30b) für das elektromagnetische Vektorpotential $\mathfrak{A}$ stimmt mit (30a) formal überein. Wir könnten sie mithin in ganz entsprechender Weise lösen, wenn die Anfangswerte von $\mathfrak{A}$ und $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ bekannt wären, und wenn weiterhin die Verteilung des Konvektionsstromes $\mathfrak{f}$ als Funktion der Zeit gegeben wäre. Es bliebe, um die so erhaltene Lösung für das im Eingange des § 6 aufgestellte Problem nutzbar zu machen, nur noch übrig, anzugeben, wie der Anfangszustand des Feldes mit den Anfangswerten der elektromagnetischen Potentiale und ihrer zeitlichen Änderungen verknüpft ist.

Wir wollen indessen, um uns nicht in Allgemeinheiten zu verlieren, über den Anfangszustand des Feldes eine ganz bestimmte Voraussetzung machen. Wir wollen annehmen, daß zur Zeit $t = 0$ im ganzen Raume das Feld ein elektrostatisches ist. Das elektrostatische Feld ist durch die Verteilung der ruhenden Elektrizität bestimmt. Es kann daher die zu lösende Aufgabe jetzt folgendermaßen ausgesprochen werden: Gegeben sei die anfängliche Verteilung der ruhenden Elektrizität, und weiterhin die Verteilung der Elektrizität und des Konvektionsstromes. Welches ist der Verlauf der elektromagnetischen Störung?

Für das anfangs herrschende elektrostatische Feld geht das skalare elektromagnetische Potential Φ in das elektrostatische Potential φ über. Wir wollen sehen, was die Formel (39) für den Fall ergibt, daß das zur Zeit $t = 0$ bestehende elektrostatische Feld auch weiterhin bestehen bleibt. Alsdann ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{c \, \partial t} = 0,$$

und es ist, nach (31b) und (33c), die Funktion $G(r)$ identisch gleich Null Die Funktion $F(r)$ aber wird, nach (31a) und (33b), in diesem Falle gleich dem über die Kugel mit dem Radius r erstreckten Integrale

$$F(r) = \frac{1}{4\pi} \int r \varphi \, d\omega,$$

demnach wird

$$F'(r) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial(r\varphi)}{\partial r}\, d\omega.$$

Endlich ist die elektrische Dichte ϱ von der Zeit unabhängig, und daher ist $\varrho(\lambda, l-\lambda) = \varrho(\lambda, 0)$ zu setzen.

Die Formel (39) zeigt nun, wie man den Wert des skalaren Potentiales, zur Zeit t, in irgendeinem Aufpunkte P zu berechnen hat: man konstruiere um P eine Kugel mit dem Radius $l = ct$. Man setze in $F'(r)$ und $G(r)$ an Stelle von r jetzt l, d. h. man berechne den Wert dieser Integrale für die Kugel vom Radius l. Endlich füge man das über das Innere der Kugel zu erstreckende Integral hinzu, zu dem die mit Elektrizität erfüllten Volumelemente Beiträge liefern. Für das elektrostatische Potential ergibt sich auf diese Weise

$$(40)\qquad \varphi(0, l) = \frac{1}{4\pi}\int d\omega \left(\frac{\partial(r\varphi)}{\partial r}\right)_{r=l} + \int_0^l \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \varrho(\lambda, 0).$$

Da das elektrostatische Potential von der Zeit unabhängig ist, so muß die rechte Seite der Gleichung denselben Wert ergeben, welches auch der Radius l der Kugel sein mag. Wir können die Gleichung (40), nach Einführung des Flächenelementes $df = r^2 d\omega$ und des Volumelementes $dv = \lambda^2 d\lambda d\omega = r^2 dr d\omega$, schreiben

$$(40\text{a})\qquad \varphi(0, l) = \frac{1}{4\pi}\int df \left\{\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right\} + \int \frac{dv\varrho}{r}.$$

Sie drückt den Wert des elektrostatischen Potentiales im Mittelpunkte einer beliebigen Kugel aus als Summe eines über ihre Oberfläche und eines über ihr Inneres erstreckten Integrales.

Wir wollen noch zeigen, daß diese Formel mit den auf ganz anderem Wege in der allgemeinen Theorie des wirbelfreien Vektorfeldes erhaltenen Beziehungen übereinstimmt. Wir knüpfen dabei an die in Bd. I, S. 66 ff. angewandte Methode an, welche sich auf den Greenschen Satz (I., Gl. 76) stützt. Es wurde daselbst $\psi = \frac{1}{r}$ gesetzt, und der Greensche Satz alsdann auf ein Gebiet angewandt, das einerseits von einer kleinen,

den Aufpunkt P einschließenden Kugel f_0, anderseits von einer beliebigen Fläche f begrenzt war. Es folgte für dieses Gebiet:

$$\int df_0 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right\} + \int df \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right\}$$
$$= \int dv \left\{ \frac{1}{r} \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \frac{1}{r} \right\}.$$

Als Grenzwert des ersten Gliedes bei verschwindendem Radius der Kugel f_0 ergab sich $-4\pi\varphi_0$, während das Volumintegral gleich

$$-4\pi \cdot \int \frac{dv\varrho}{r}$$

war. Wir erhalten mithin

$$\text{(40b)} \qquad \varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \int df \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right\} + \int \frac{dv\varrho}{r}.$$

Indem die Begrenzungsfläche f ins Unendliche gerückt wurde, folgte die Formel I, Gl. 83, S. 68. Lassen wir sie indessen mit einer Kugel um P zusammenfallen, so ist Differentiation nach ν äquivalent mit Differentiation nach r; es geht daher (40b) in (40a) über. Damit haben wir die Formel (40a), die sich hier durch Spezialisierung der allgemeinen, für das elektromagnetische Potential Φ geltenden Formel (39) ergab, auf einem unabhängigen Wege hergeleitet.

Die Formel (40) stellt nun das elektrostatische Feld dar, welches zur Zeit $t = 0$ herrscht. Ein magnetisches Feld soll zur Zeit $t = 0$ nicht vorhanden sein. Es ist demnach zur Zeit $t = 0$:

$$\Phi = \varphi, \quad \mathfrak{A} = 0.$$

Was aber die Anfangswerte der Ableitungen von Φ und $\mathfrak{A}$ nach der Zeit anbelangt, so folgt aus (29), da ja zur Zeit $t = 0$

$$\mathfrak{E} = -\nabla \varphi$$

sein soll, daß für

$$t = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = 0$$

ist.

Der Anfangswert von $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ aber ist so zu wählen, daß zur Zeit $t = 0$ die Relation (30) erfüllt ist. Dies ergibt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Auf Grund der Anfangsbedingungen

$$\Phi = \varphi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial l} = 0 \quad \text{für } l = ct = 0 \tag{41}$$

ergibt die Grundformel (39):

$$\Phi(0, l) = \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{\partial r \varphi}{\partial r}\right)_{r = l} d\omega + \int\limits_0^l \lambda d\lambda \int d\omega\, \varrho(\lambda, l - \lambda) \tag{42}$$

als Wert des **skalaren elektromagnetischen Potentiales.** Das erste, vom Anfangszustand allein abhängige Glied ist identisch mit dem im Ausdrucke (40) des elektrostatischen Potentiales auftretenden; das erklärt sich daraus, daß die Anfangsbedingungen (41) mit denen des elektrostatischen Feldes übereinstimmen. Der Unterschied gegen (40) liegt in dem von der Elektrizitätsverteilung abhängigen Volumintegral. Dort war auf der Oberfläche der Kugel vom Radius λ die durch $\varrho(\lambda, 0)$ gekennzeichnete anfängliche Dichte der Elektrizitätsverteilung in Rechnung zu ziehen, die ja weiterhin nicht abgeändert wurde. Wir könnten dort, in (40), mit demselben Rechte an Stelle von $\varrho(\lambda, 0)$ die gleichzeitige, zur Zeit t im Abstande λ vom Aufpunkt herrschende räumliche Dichte $\varrho(\lambda, l)$ verstehen, oder auch die räumliche Dichte in irgendeinem, dem Zeitintervalle von $t = 0$ bis $t = \frac{l}{c}$ angehörenden Zeitpunkte; denn in diesem Zeitintervalle sollte die anfängliche Dichte $\varrho(\lambda, 0)$ bestehen bleiben. Hier, in (42), hingegen handelt es sich um eine zeitlich veränderliche Elektrizitätsverteilung; es ist, auf der Oberfläche der Kugel vom Radius λ, die durch $\varrho(\lambda, l - \lambda)$ gekennzeichnete Dichte in Rechnung zu ziehen, d. h. diejenige, welche zur Zeit $\frac{l - \lambda}{c} = t - \frac{\lambda}{c}$ auf jener Kugelfläche herrschte. Es kommt für das Feld, welches im Aufpunkte P zur Zeit t erregt wird, nicht die gleichzeitige Elektrizitätsverteilung im ganzen Raume in Betracht, sondern

für jede der Kugeln die elektrische Dichte, die daselbst zu einer um

$$\tau = \frac{\lambda}{c} \tag{42a}$$

zurückliegenden Zeit bestanden hat. Der zur Zeit $t - \tau$ entsandte Beitrag trifft zur Zeit t im Aufpunkte ein. Wir können τ als „Latenszeit", λ als „Latensweg" bezeichnen. Es folgt das wichtige Ergebnis: Die durch Abänderung der elektrischen Dichte erregte elektromagnetische Störung pflanzt sich nach allen Seiten mit der Geschwindigkeit c im Raume fort.

Wir erhalten das skalare elektromagnetische Potential des durch Abänderung der Elektrizitätsverteilung erregten Feldes, indem wir das elektrostatische Potential (40) des anfänglichen Feldes von dem skalaren Potentiale (42) des abgeänderten Feldes subtrahieren:

$$\Phi(0, l) - \varphi(0, l) = \int_0^l \lambda d\lambda \int d\omega \left\{ \varrho(\lambda, l - \lambda) - \varrho(\lambda, 0) \right\} \cdot \tag{43}$$

Was aber das elektromagnetische Vektorpotential anbelangt, so entsprechen, wie wir oben gesehen haben, dem angenommenen Anfangszustande die Anfangsbedingungen

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial l} = 0 \quad \text{für} \quad l = ct = 0.$$

Da nun die Differentialgleichung (30b) formal der Gleichung (30a) durchaus entspricht, so erhält man die Komponenten des Vektorpotentiales $\mathfrak{A}$, indem man in (39) ϱ durch die Komponenten des Konvektionsstromes $\mathfrak{k}$ ersetzt und, bei der Auswertung von F und G gemäß (33b, c), $f(xyz)$ und $g(xyz)$ durch die Anfangswerte der Komponenten von $\mathfrak{A}$ und $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial l}$ ersetzt. Unter den obigen speziellen Anfangsbedingungen nun verschwinden die so berechneten Funktionen F und G identisch, und es wird

$$\mathfrak{A}(0, l) = \int_0^l \lambda d\lambda \int d\omega\, \mathfrak{k}(\lambda, l - \lambda). \tag{44}$$

Aus den elektromagnetischen Potentialen (43) und (44) ist, gemäß (28) und (29), das elektromagnetische Feld zu berechnen, welches durch die Abänderung der Elektrizitätsverteilung und durch den diese Abänderung begleitenden Konvektionsstrom erregt wird.

Um den Beweis, daß die erhaltenen Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (30a, b) Integrale der Feldgleichungen I bis IV ergeben, zu Ende zu führen, bedarf es nur noch des Nachweises, daß die Gleichung (30), die Φ und $\mathfrak{A}$ miteinander verknüpft, wirklich besteht. Das ist in der Tat der Fall, falls stets und überall die Kontinuitätsbedingung der Elektrizität (30c):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial l} + \operatorname{div} \mathfrak{f} = 0 \tag{45}$$

erfüllt ist.

Wir differenzieren zunächst (43) nach l; da $\varphi(0, l)$ das elektrostatische Potential ist, so ist

$$\frac{\partial \varphi(0, l)}{\partial l} = 0.$$

Die rechte Seite von (43) hängt in zwiefacher Weise von l ab; erstens insofern, als l die obere Grenze des nach λ genommenen Integrales ist, zweitens dadurch, daß, für einen bestimmten Punkt des Raumes, ϱ von l abhängt. Die Differentiation nach der oberen Grenze ergibt:

$$l \int d\omega \{\varrho(l, 0) - \varrho(l, 0)\} = 0.$$

Es bleibt also nur der durch Differentiation des ϱ entstehende Ausdruck übrig

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \int_0^l \lambda d\lambda \int d\omega \left\{\frac{\partial \varrho}{\partial l}\right\}_{\lambda, l-\lambda}. \tag{45a}$$

Bei der Differentiation nach l war der Aufpunkt P festzuhalten. Bei der Differentiation nach den Koordinaten ist der Aufpunkt, und mit ihm das ganze Kugelsystem, zu verschieben. Bei Berechnung des Beitrages, den ein in dem Kugelsystem fest zu denkendes Volumelement zum Werte von

$\mathfrak{A}_x$ im Aufpunkte liefert, ist der Wert von $\mathfrak{k}_x$ in Rechnung zu ziehen, der in dem Mittelpunkte des jeweils gedeckten Volumelementes des Raumes zur Zeit $\frac{l-\lambda}{c}$ herrschte. Wird nun P um dx parallel der x-Achse verschoben, so ist das ganze Kugelsystem mit zu verschieben. Das im Kugelsystem feste Volumelement deckt jetzt ein anderes Volumelement des Raumes, und es ist der Wert von $\mathfrak{k}_x$ in dessen Mittelpunkte zur Zeit $\frac{l-\lambda}{c}$ in Rechnung zu ziehen, d. h. ein um $\frac{\partial \mathfrak{k}_x}{\partial x} \cdot dx$ größerer Wert als vorhin. So ergibt sich

$$\text{(45b)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{A} = \int_0^l \lambda d\lambda \int d\omega \{\operatorname{div} \mathfrak{k}\}_{\lambda, l-\lambda}.$$

Addieren wir die durch (45a, b) gegebenen Werte von $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ und div $\mathfrak{A}$ im Aufpunkte P, so erhalten wir

$$\text{(45c)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial l} + \operatorname{div} \mathfrak{A} = \int_0^l \lambda d\lambda \int d\omega \left\{\frac{\partial \varrho}{\partial l} + \operatorname{div} \mathfrak{k}\right\}_{\lambda, l-\lambda}.$$

Die Relation

$$\text{(46)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial l} + \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$$

erweist sich demnach zur Zeit t als erfüllt, falls die bewegte Elektrizität bis zur Zeit t überall der Kontinuitätsbedingung (45) Genüge geleistet hat.

Aus den Entwickelungen des § 6 folgt nun ohne weiteres, daß die aus den elektromagnetischen Potentialen Φ, $\mathfrak{A}$ gemäß (28) und (29) abzuleitenden Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ wirklich den Feldgleichungen I bis IV Genüge leisten. Die Gleichungen (43) und (44) lösen das Problem, welches uns jetzt beschäftigt. Sie bestimmen die Störung des ursprünglichen elektrostatischen Feldes, wenn die anfängliche Verteilung der ruhenden Elektrizität, und weiterhin ihre Bewegung gegeben ist.

Wir können die Lösung noch auf eine andere Form bringen, indem wir den Hilfsvektor einführen

$$\text{(47)} \qquad \mathfrak{q} = \int_0^l \mathfrak{k}\, dl = c \cdot \int_0^t \mathfrak{k}\, dt.$$

Wir tragen der Kontinuitätsbedingung (45) Rechnung, indem wir schreiben:

$$\operatorname{div} \mathfrak{q} = \int_0^l \operatorname{div} \mathfrak{k}\, dl = -\int_0^l \frac{\partial \varrho}{\partial l}\, dl = -\{\varrho_l - \varrho_0\}\cdot$$

Es gibt also der Vektor $\mathfrak{q}$ durch seine negativ genommene Divergenz

$$-\operatorname{div} \mathfrak{q} = \varrho_l - \varrho_0 \tag{47a}$$

den Überschuß der jeweiligen elektrischen Dichte über die anfängliche Dichte an, während seine Ableitung nach l

$$\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial l} = \mathfrak{k} \tag{47b}$$

die Dichte des Konvektionsstromes darstellt. Diese beiden Größen waren es, welche in (43) und (44) auftraten.

Bestimmen wir jetzt einen neuen Vektor $\mathfrak{Z}$ folgendermaßen:

$$\mathfrak{Z}(0, l) = \int_0^l \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \mathfrak{q}(\lambda, l - \lambda), \tag{48}$$

so gelangen wir durch Bildung der negativen Divergenz bzw. der zeitlichen Ableitung zu (43) und (44) zurück. In der Tat, differenzieren wir nach l, so erhalten wir zwei Glieder

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l} = l \int d\omega\, \mathfrak{q}(l, 0) + \int_0^l \lambda\, d\lambda \int d\omega \left\{\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial l}\right\}_{\lambda, l - \lambda};$$

das erste Glied ist gleich Null, weil, nach (47), $\mathfrak{q}$ für $l = 0$ verschwindet. Nach (44) und (47b) folgt demnach

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}. \tag{48a}$$

Bildet man anderseits die Divergenz von $\mathfrak{Z}$ gemäß den bei der Ableitung an (45b) angegebenen Regeln, so folgt, mit Rücksicht auf (43) und (47a),

$$\Phi - \varphi = -\operatorname{div} \mathfrak{Z}. \tag{48b}$$

Der Vektor $\mathfrak{Z}$ stellt ein den elektromagnetischen Potentialen Φ, $\mathfrak{A}$ übergeordnetes Potential dar. Die Beziehungen (48a, b)

lassen sofort erkennen, daß die Relation (46) allgemein erfüllt ist. Wir wollen $\mathfrak{Z}$ den „Hertzschen Vektor" nennen; wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, erhalten wir nämlich durch Spezialisierung des durch (48) definierten Vektors die sogenannte „Hertzsche Funktion", durch deren Ableitungen zweiter Ordnung nach der Zeit und nach den Koordinaten das elektromagnetische Feld eines Dipols sich darstellen läßt. Wir werden diese Darstellung ableiten aus den Vektorgleichungen, die aus (48a, b) in Verbindung mit (28) und (29) resultieren:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}, \tag{48c}$$

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial l^2}. \tag{48d}$$

Hier stellt $\mathfrak{E}_0$ das ursprüngliche elektrostatische Feld vor. Die Formeln (48c, d) stellen den Verlauf einer beliebigen elektromagnetischen Störung mit Hilfe eines einzigen Vektors dar.

Wir haben bisher immer die anfängliche Verteilung der ruhenden Elektrizität als gegeben angenommen. Man wird, um sicher zu sein, daß die Energie und der Impuls des elektromagnetischen Feldes endlich sind, meist von einem elektrostatischen Anfangszustande ausgehen. Unter Umständen kann es indessen vorkommen, daß dieser Anfangszustand bereits sehr weit zurückliegt und daß seine Kenntnis daher für das Feld in endlichen Entfernungen von dem Elektronensystem nicht von Belang ist. In diesem Falle wird man wünschen, die Formeln von dem elektrostatischen Potentiale φ zu befreien.

Liegt der Anfangszustand so weit zurück, daß die Kugel, die um den Aufpunkt P mit dem Radius $l = ct$ geschlagen ist, die gesamte Elektrizität des ursprünglichen elektrostatischen Feldes einschließt, so ist das elektrostatische Potential im Aufpunkte

$$\varphi(0, l) = \int_0^l \lambda d\lambda \int d\omega\, \varrho(\lambda, 0). \tag{49}$$

In der Tat, da außerhalb der Kugel l in dem elektrostatischen Felde sich keine Elektrizität befindet, so ist diese Formel dem Sinne nach völlig identisch mit

$$\varphi(0, l) = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int d\omega \varrho(\lambda, 0), \tag{49a}$$

was wieder nur eine andere Form des in Bd. I (Gl. 83, S. 68) für das elektrostatische Potential erhaltenen Ausdrucks

$$\varphi = \int \frac{dv \varrho}{r} \tag{49b}$$

ist.

Soll das Feld zur Zeit $t = 0$ wirklich durchweg ein elektrostatisches sein, so darf vor diesem Zeitpunkte die Elektrizität sich nicht bewegt haben. Es ist dann zu setzen

$$\varrho(r, l) = \varrho(r, 0) \quad \text{für} \quad l < 0$$

und daher

$$\varrho(\lambda, l - \lambda) = \varrho(\lambda, 0) \quad \text{für} \quad \lambda > l.$$

Es kann demnach in (43) ohne weiteres als obere Grenze $\lambda = \infty$ statt l gesetzt werden, ohne den Wert der rechten Seite zu ändern.

Mit Rücksicht auf (49a) folgt

$$\Phi = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int d\omega \, \varrho(\lambda, l - \lambda). \tag{50}$$

Anderseits ist, da zu negativen Zeiten die Elektrizität sich nicht bewegt hat,

$$\mathfrak{f}(r, l) = 0 \quad \text{für} \quad l < 0$$

und daher

$$\mathfrak{f}(\lambda, l - \lambda) = 0 \quad \text{für} \quad \lambda > l.$$

Es kann somit auch in (44) die Integration ohne weiteres bis zur oberen Grenze $\lambda = \infty$ ausgedehnt werden, so daß man erhält

$$\mathfrak{A} = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int d\omega \, \mathfrak{f}(\lambda, l - \lambda). \tag{51}$$

Diese Formeln für die elektromagnetischen Potentiale enthalten keine Beziehung zur anfänglichen Verteilung der Elektrizität. Sie gestatten folgende anschauliche Deutung.

Man denke sich um den Aufpunkt eine Kugel mit dem veränderlichen Radius λ geschlagen. Diese Kugel soll sich mit Lichtgeschwindigkeit kontrahieren, derart, daß sie zur Zeit t im Aufpunkte eintrifft. Zur Zeit $t-\tau$ ist ihr Radius $c\tau = \lambda$. Diese Kugel fegt nun gewissermaßen das Feld ab. Wo sie Elektrizität und Konvektionsstrom antrifft, da fängt sie die Beiträge ab

$$d\Phi = \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \varrho(\lambda, l-\lambda), \tag{50a}$$

$$d\mathfrak{A} = \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \mathfrak{k}(\lambda, l-\lambda), \tag{51a}$$

welche nach Durchlaufung des Latensweges λ im Aufpunkte eintreffen. Es ist demnach für jedes Volumelement des Raumes die Elektrizität und der Konvektionsstrom in Rechnung zu setzen, welche die Kugel auf ihrem Wege antrifft; die Division durch den Kugelradius ergibt den Beitrag zum skalaren und zum Vektorpotentiale. Diese Beiträge eilen mit Lichtgeschwindigkeit fort. Die Zusammensetzung aller Beiträge, d. h. die Integration nach λ, ergibt gemäß (50, 51) die Werte der Potentiale im Aufpunkte.

Wir können diese Formeln auch schreiben

$$\Phi = \int \frac{dv}{r} \{\varrho\}_{t-\frac{r}{c}}, \tag{50b}$$

$$\mathfrak{A} = \int \frac{dv}{r} \{\mathfrak{k}\}_{t-\frac{r}{c}}. \tag{51b}$$

Dabei sind die Integrationen über den gesamten Raum auszudehnen, ebenso wie in der Formel (49b) für das elektrostatische Potential. Der Unterschied liegt nur darin, daß nicht die jeweilige Dichte der Elektrizität und des Konvektionsstromes in Rechnung zu setzen ist, sondern, wie der Index

$t - \frac{r}{c}$ anzeigt, diejenige Dichte, welche zu einem um die Latenszeit $\tau = \frac{r}{c}$ früheren Zeitpunkte in dem betreffenden Volumelemente herrschte.

Die Potentiale (50b) und (51b) sind von H. Poincaré, E. Beltrami, V. Volterra, H. A. Lorentz, T. Levi-Cività und anderen Forschern angewandt worden. Meist werden sie dem elektrostatischen Potentiale (49b) als „retardierte Potentiale", d. h. verspätete oder verzögerte Potentiale gegenübergestellt.

Die in (50, 51) gegebene Darstellung der elektromagnetischen Potentiale durch einfache Integrale über den Latensweg, auf die wir hier unmittelbar geführt wurden, wird sich für die Ermittelung des Feldes bewegter Elektronen als besonders geeignet erweisen.

Die Formel (48) für den Hertzschen Vektor können wir gleichfalls unschwer auf die Form bringen

(51c)
$$\mathfrak{Z} = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int d\omega\, \mathfrak{q}(\lambda, l - \lambda)$$

und können sie, ähnlich wie (50) und (51), durch Betrachtung der auf den Aufpunkt hin mit Lichtgeschwindigkeit sich kontrahierenden Kugel anschaulich deuten.

Zweites Kapitel.

Die Wellenstrahlung einer bewegten Punktladung.

§ 9. Elektromagnetisches Modell einer Lichtquelle.

Die Entwickelungen des letzten Paragraphen haben uns gezeigt, daß der Raum die elektromagnetischen Wellen zwar fortpflanzt, daß aber in dem leeren Raume elektrische Störungen nicht entstehen können. Die Quellen der elektromagnetischen Störungen liegen in der Elektrizität. Da wir nun das Licht

als elektromagnetische Wellenstrahlung zu betrachten gelernt haben, so werden wir zu dem Schlusse geführt, daß im Innern der lichtemittierenden Moleküle die Elektrizität in Bewegung begriffen ist. Das einfachste denkbare elektromagnetische Modell einer Lichtquelle erhalten wir, wenn wir ein einziges Elektron um seine Gleichgewichtslage schwingend annehmen.

Auf Grund der allgemeinen Ansätze des vorigen Paragraphen können wir das elektromagnetische Feld eines beliebig bewegten Elektrons bestimmen. Wir wollen indessen das vorliegende Problem zunächst unter gewissen Einschränkungen behandeln, Einschränkungen, die wir dann in den folgenden Paragraphen wieder beseitigen werden. Wir wollen in Betracht ziehen, daß die Bewegung des lichtaussendenden Elektrons nur auf molekulare Bereiche sich erstreckt, daß also seine Entfernung aus der Gleichgewichtslage klein ist gegen diejenigen Entfernungen, in denen man das entsandte Licht wahrnimmt. Ferner soll die Geschwindigkeit des Elektrons als klein gegen die Lichtgeschwindigkeit angenommen werden. Die Gleichung (48) des vorigen Abschnittes führt uns in diesem Falle ohne weiteres zum Ausdrucke des Hertzschen Vektors. Die sich kontrahierende Kugel fängt beim Hinwegstreichen über das Elektron einen Beitrag ab. Da die Geschwindigkeit des Elektrons klein gegen die Geschwindigkeit c angenommen wird, mit welcher die Kugel sich kontrahiert, so kann man die Integration über das Elektron so ausführen, als wenn es in seiner augenblicklichen Lage ruhte. Nach (10) und (47) ist mithin

$$\int_0^l \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \mathfrak{q}(\lambda, l-\lambda) = \int_0^l \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \varrho \left\{ \int_0^t \mathfrak{v}\, dt \right\}_{l-\lambda}$$

$$= \frac{e}{\lambda} \left\{ \int_0^t \mathfrak{v}\, dt \right\}_{l-\lambda};$$

dabei stellt e die gesamte Ladung des Elektrons vor, λ seine Entfernung vom Aufpunkte, die infolge der gemachten Annahmen durch die Entfernung r des Aufpunktes von der Gleichgewichtslage des Elektrons zu ersetzen ist. Endlich ist

$$\int_0^t \mathfrak{v}\, dt$$

die jeweilige Entfernung des Elektrons aus seiner Gleichgewichtslage; für den Wert des Hertzschen Vektors im Aufpunkte kommt die Elongation des Elektrons zur Zeit

$$\frac{l-\lambda}{c} = t - \frac{r}{c}$$

in Betracht. Setzen wir abkürzungsweise

$$e \cdot \int_0^t \mathfrak{v}\, dt = \mathfrak{p}(l), \tag{52}$$

indem wir uns den Vektor $\mathfrak{p}$, statt von der Zeit t, von dem Lichtwege ct abhängig denken, so wird der Hertzsche Vektor (48)

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r}. \tag{52a}$$

Wir wollen voraussetzen, daß zur Zeit $t = 0$ das Elektron in seiner Gleichgewichtslage sich befindet, und daß dann das Molekül kein elektrostatisches Feld erregt. Alsdann ist in (48b) das anfängliche elektrostatische Potential φ gleich Null zu setzen, und es wird das skalare elektromagnetische Potential

$$\Phi = -\operatorname{div}\left\{\frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r}\right\}. \tag{52b}$$

Bei der Berechnung der Divergenz des Produktes aus dem Skalar $\frac{1}{r}$ und dem Vektor $\mathfrak{p}$ ist die Formel (ι) der Zusammenstellung in Bd. I, S. 437 heranzuziehen, und es ist zu beachten, daß das Argument von $\mathfrak{p}$ die Entfernung r enthält; es wird

$$\Phi = -\left(\mathfrak{p}\,(l-r),\ \nabla_a \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\left(\dot{\mathfrak{p}}\,(l-r),\ \nabla_a r\right), \tag{52c}$$

wo

$$\dot{\mathfrak{p}}(l) = \frac{d\mathfrak{p}(l)}{dl} = \frac{e\mathfrak{v}}{c}$$

die elektromagnetisch gemessene Stromstärke des Stromelementes ist, welches das bewegte Elektron darstellt. Dieselbe

geht auch in den aus (48a) folgenden Ausdruck des elektromagnetischen Vektorpotentiales ein:

$$\mathfrak{A} = \frac{\dot{\mathfrak{p}}(l-r)}{r}. \tag{52d}$$

Das erste Glied in (52c) ist ganz analog gebaut, wie der Ausdruck für das Potential einer Doppelquelle (Bd. I, Gl. 81, S. 63), vom Momente $\mathfrak{p}(l-r)$. Dieses Glied kommt in der Nähe des Erregungszentrums ausschließlich in Betracht; das sieht man sofort ein, wenn man

$$\nabla_a r = \mathfrak{r}_1, \quad \nabla_a \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \mathfrak{r}_1 \tag{52e}$$

setzt und unter $\mathfrak{r}_1$ einen Einheitsvektor versteht, welcher der Richtung nach mit dem vom Erregungszentrum nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ übereinstimmt; dann wird

$$\Phi = \frac{1}{r^2}\left(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{p}(l-r)\right) + \frac{1}{r}\left(\mathfrak{r}_1, \dot{\mathfrak{p}}(l-r)\right). \tag{52f}$$

Es entsteht nun weiter die Aufgabe, aus den elektromagnetischen Potentialen die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ abzuleiten. Wir ziehen es vor, statt diese durch Vektorkalkül zu berechnen, eine Komponentenzerlegung vorzunehmen, erstens, weil so die Größenordnung der verschiedenen Glieder sich besser übersehen läßt, und zweitens, weil dabei die Beziehung unserer Entwickelungen zu der grundlegenden Arbeit von Heinrich Hertz[1]) deutlicher hervortritt. Wir berechnen den Beitrag, den die z-Komponente des Vektors $\mathfrak{p}$ zum Felde liefert; führt das Elektron Schwingungen parallel der z-Achse aus, so stellen die betreffenden Anteile der Feldstärken bereits vollständig das Feld dar. Der Hertzsche Vektor geht in die Funktion

$$\mathfrak{Z}_z = \frac{\mathfrak{p}_z(l-r)}{r} \tag{53}$$

über, die Hertz mit Π bezeichnet hat und die von manchen Autoren die „Hertzsche Funktion“ genannt wird. Aus ihr

1) H. Hertz, Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwellschen Theorie. Ann. d. Phys. 36, S. 1, 1888. Ges. Werke II, S. 147.

sind die Komponenten der Feldstärken gemäß (48c, d) abzuleiten. Es ist

$$\mathfrak{H}_x = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial y \partial l}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial x \partial l}, \tag{53a}$$

$$\mathfrak{E}_x = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial x \partial z}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial y \partial z}, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial l^2}. \tag{53b}$$

Die Ausführung der Differentiationen ergibt

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{p}_z \cdot \frac{3xz}{r^5} + \dot{\mathfrak{p}}_z \cdot \frac{3xz}{r^4} + \ddot{\mathfrak{p}}_z \cdot \frac{xz}{r^3}, \\ \mathfrak{E}_y = \mathfrak{p}_z \cdot \frac{3yz}{r^5} + \dot{\mathfrak{p}}_z \cdot \frac{3yz}{r^4} + \ddot{\mathfrak{p}}_z \cdot \frac{yz}{r^3}, \\ \mathfrak{E}_z = \mathfrak{p}_z \cdot \frac{3z^2 - r^2}{r^5} + \dot{\mathfrak{p}}_z \cdot \frac{3z^2 - r^2}{r^4} + \ddot{\mathfrak{p}}_z \cdot \frac{z^2 - r^2}{r^3}; \end{cases} \tag{53c}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{H}_x = -\dot{\mathfrak{p}}_z \cdot \frac{y}{r^3} - \ddot{\mathfrak{p}}_z \frac{y}{r^2}, \\ \mathfrak{H}_y = +\dot{\mathfrak{p}}_z \cdot \frac{x}{r^3} + \ddot{\mathfrak{p}}_z \cdot \frac{x}{r^2}, \\ \mathfrak{H}_z = 0 \quad . \end{cases} \tag{53d}$$

Dabei sind es selbstverständlich die Werte von $\mathfrak{p}_z$, $\frac{d\mathfrak{p}_z}{dl}$ und $\frac{d^2\mathfrak{p}_z}{dl^2}$ für den Argumentwert $(l - r)$, die für das Feld im Aufpunkte in Betracht kommen. Dieses Argument braucht jetzt, als selbstverständlich, nicht mehr in den Formeln zum Ausdruck gebracht zu werden.

Führt das Elektron in der Lichtquelle einfach harmonische Schwingungen aus, so daß etwa in (53c, d)

$$\mathfrak{p}_z = b \sin \frac{2\pi}{\lambda} (l - r)$$

zu setzen ist, so verhalten sich die Amplituden der drei Glieder z. B. im Ausdrucke der Komponenten von $\mathfrak{E}$ wie

$$1 : \frac{r}{2\pi\lambda} : \left(\frac{r}{2\pi\lambda}\right)^2.$$

Es ist demnach, wenn die Entfernung vom lichtaussendenden Molekül klein gegen die Wellenlänge des entsandten Lichtes

ist, nur das erste Glied zu berücksichtigen. Dort, wo man die Lichtstrahlung beobachtet, ist im Gegenteil r groß gegen $2\pi\lambda$; hier hängt $\mathfrak{E}$ — und dasselbe gilt von dem magnetischen Vektor $\mathfrak{H}$ — nur von $\ddot{\mathfrak{p}}$ ab; die Feldstärken nehmen hier, wenn die Welle sich immer weiter ausbreitet, umgekehrt proportional der Entfernung vom Wellenzentrum ab. Das Gebiet, in dem dieses stattfindet, wird die „Wellenzone" genannt.

Wir wollen die Ausdrücke der Feldstärken in der Wellenzone sogleich in vektorieller Schreibweise angeben. Wir übersehen leicht, daß wir die zu $\ddot{\mathfrak{p}}$ proportionalen Glieder in (53c, d) und die aus ihnen durch zyklische Vertauschung von x, y, z entstehenden, welche Schwingungen parallel der x- bzw. der y-Achse entsprechen, folgendermaßen in Vektorgleichungen zusammenfassen können:

$$(54)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \dfrac{\mathfrak{r}_1}{r}\left(\mathfrak{r}_1\ddot{\mathfrak{p}}\right) - \dfrac{1}{r}\ddot{\mathfrak{p}} = \dfrac{1}{r}\left[\mathfrak{r}_1\left[\mathfrak{r}_1\ddot{\mathfrak{p}}\right]\right], \\ \mathfrak{H} = -\dfrac{1}{r}\left[\mathfrak{r}_1\ddot{\mathfrak{p}}\right]. \end{cases}$$

Dabei ist nach (52)

$$(54\text{a})\quad \ddot{\mathfrak{p}} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dl^2} = \frac{e}{c^2}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

der Beschleunigung des Elektrons proportional.

Denken wir uns nun die vom schwingenden Elektron entsandten Wellen von einem beliebigen Aufpunkte aus beobachtet, so hängen die Feldstärken nur von dem Vektor

$$[\mathfrak{r}_1\ddot{\mathfrak{p}}]$$

ab. Es kommt für den Beobachter allein die Projektion der Schwingung auf eine zur Blickrichtung senkrechte Ebene in Betracht. Das äußere Produkt aus dem Einheitsvektor $\mathfrak{r}_1$ und $\ddot{\mathfrak{p}}$ liegt in dieser Ebene; es ist dem Betrage nach gleich, der Richtung nach senkrecht zu der Projektion von $\ddot{\mathfrak{p}}$; ihm parallel ist nach (54) der magnetische Vektor der entsandten Wellen, der die Polarisationsebene des Lichtes bestimmt. Der Beobachter wird demnach geradlinig polarisiertes Licht wahrnehmen, wenn die Projektion der Elektronenbewegung auf die zur Blickrichtung senkrechte Ebene eine

geradlinige Schwingung ist, und zwar wird die Schwingungsrichtung in jener Ebene senkrecht auf der Polarisationsebene des entsandten Lichtes sein. Ist hingegen die Projektion der Bewegung des Elektrons auf jene Ebene eine Kreisschwingung, so wird der Beobachter zirkular polarisiertes Licht wahrnehmen, und zwar rechts- oder linkszirkulares, je nachdem die Kreisschwingung rechts herum oder links herum (im Sinne des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten) um die Blickrichtung stattfindet; denn bei einer Kreisbewegung rotieren Fahrstrahl, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor in dem gleichen Sinne.

Nach (54) bilden $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{r}_1$ ein System von drei aufeinander senkrechten Vektoren, und zwar folgen $\mathfrak{r}_1$, $-\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$, oder $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{r}_1$ aufeinander, wie die Achsen eines rechtshändigen Koordinatensystemes. Es liegt mithin $\mathfrak{E}$ in der Wellenebene senkrecht zu $\mathfrak{H}$, also parallel der Projektion des Vektors $\ddot{\mathfrak{p}}$ (oder des Beschleunigungsvektors) auf die zur Blickrichtung senkrechte Ebene. Der Betrag von $\mathfrak{E}$ ist demjenigen von $\mathfrak{H}$ gleich. Es liegen demnach hier in der Wellenzone dieselben Verhältnisse vor, wie bei ebenen elektromagnetischen Wellen (vgl. Bd. I, § 69). Nur ändern sich bei ebenen Wellen die Amplituden während der Fortpflanzung nicht, während hier, bei den Kugelwellen, die Amplituden der Feldstärken mit wachsender Entfernung r vom Zentrum wie $1:r$ abnehmen.

Der Strahlvektor $\mathfrak{S}$ ist nach Gleichung (13) durch das äußere Produkt von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gegeben. Er weist also parallel dem Radiusvektor, was der Beobachtung entspricht. Da $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}$ ein System wechselseitig aufeinander senkrechter Richtungen bilden und die Beträge von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ einander gleich sind, so ist der Betrag von $\mathfrak{S}$:

$$S = \frac{c}{4\pi} \cdot |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| = \frac{c}{4\pi} \cdot \mathfrak{H}^2 = \frac{c}{4\pi r^2}\left[\mathfrak{r}_1 \ddot{\mathfrak{p}}\right]^2. \tag{54b}$$

Bezeichnen wir mit ϑ den Winkel der Vektoren $\mathfrak{r}_1$ und $\ddot{\mathfrak{p}}$, so wird

$$S = \frac{c}{4\pi r^2}\, \ddot{\mathfrak{p}}^2 \sin^2\vartheta \tag{54c}$$

die **Strahlung**, die in der Sekunde durch die Flächeneinheit einer Kugel vom Radius r hindurchtritt; sie hängt gemäß (54a)

von der Ladung e und von der Beschleunigung des Elektrons ab, und zwar selbstverständlich von derjenigen Beschleunigung, die stattfand, als die Welle entsandt wurde. Die Strahlung verschwindet für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, d. h. für die Richtung des Beschleunigungsvektors und für die entgegengesetzte Richtung; sie ist am größten für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. senkrecht zur Beschleunigungsrichtung. Die Integration über die ganze Kugel ergibt als Gesamtstrahlung

$$\int S\,df = \frac{c}{4\pi}\ddot{\mathfrak{p}}^2 \cdot 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3\vartheta = \frac{c}{2}\ddot{\mathfrak{p}}^2 \cdot \int_{-1}^{+1} du\,(1-u^2) = \frac{2}{3}c\ddot{\mathfrak{p}}^2.$$

Der Radius der Kugel ist herausgefallen; es tritt also durch alle von der Welle durchsetzten konzentrischen Kugeln der Wellenzone die gleiche Energiemenge hindurch. Diese Energie hat sich von dem schwingenden Elektron losgelöst und durcheilt in Form von Wellenstrahlung den Raum, wo sie je nach der Frequenz der Schwingungen als ultraviolettes, sichtbares oder ultrarotes Licht wahrgenommen wird. Diese in Wellenstrahlung verwandelte Energiemenge wird der Lichtquelle entzogen; die pro Sekunde entzogene Energie ist nach (54a)

$$(55)\qquad -\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3}c\ddot{\mathfrak{p}}^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)^2.$$

Ist die Schwingung eine einfach harmonische und ist λ ihre Wellenlänge im Raume, so ist

$$\ddot{\mathfrak{p}} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dl^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\mathfrak{p};$$

daher wird der Energieverlust durch Strahlung

$$(55a)\qquad -\frac{dW}{dt} = \frac{32\pi^4 c}{3\lambda^4}\cdot\mathfrak{p}^2.$$

Die pro Zeiteinheit durch Strahlung verlorene Energie ist um so größer, je kleiner bei gegebener Schwingungsamplitude die Wellenlänge ist. Sie steigt bei abnehmender Wellenlänge umgekehrt proportional der vierten Potenz der Wellenlänge an. Die Schwingungen erfahren mithin eine Dämpfung durch Strahlung.

Eine solche Dämpfung ist zuerst von H. Hertz in der oben zitierten Arbeit theoretisch abgeleitet worden.

Wir wollen jetzt die Frage erörtern, inwieweit dieses einfachste elektromagnetische Modell einer Lichtquelle geeignet ist, von dem Vorgange der Lichtemission ein naturgetreues Bild zu geben. Wir wollen zunächst, das Resultat der Untersuchungen Zeemans (vgl. § 10) vorwegnehmend, voraussetzen, daß das negative Elektron es ist, welches in der Lichtquelle schwingt, und wollen dem negativen Elektron diejenigen Eigenschaften zuschreiben, die wir in § 2 bei Besprechung der Kathodenstrahlen kennen gelernt haben. Wir haben der mathematischen Behandlung den Fall zugrunde gelegt, daß vor Beginn des Schwingungsvorganges das Molekül nach außen hin unelektrisch ist. Die einfachste dementsprechende Hypothese würde die sein, daß das Molekül aus einem positiven und einem negativen Elektron besteht, deren Mittelpunkte anfangs zusammenfallen. Wird nun das negative Elektron verschoben, während das positive in Ruhe bleibt, so entsteht ein elektrischer Dipol. Unter dem Momente eines solchen Dipols wird man entsprechend dem Momente einer Doppelquelle (Bd. I, S. 63) einen Vektor zu verstehen haben, der von der negativen Ladung zur positiven weist und dessen Betrag gleich dem Produkte aus dem Abstand der Mittelpunkte beider Elektronen und der Ladung des positiven ist. Das ist aber nichts anderes, als der durch (52) definierte Vektor $\mathfrak{p}$; denn es ist zwar



$$\int_0^t \mathfrak{v}\, dt$$

der von der ruhenden positiven zur bewegten negativen Ladung weisende Fahrstrahl, aber derselbe ist mit der negativen Ladung des bewegten Elektrons zu multiplizieren. Das Feld eines der z-Achse parallelen Dipols bringen die Formeln (53c, d) zur Darstellung.

Wollen wir nun erklären, wieso etwa das Licht des Quecksilberdampfes aus einzelnen feinen Spektrallinien besteht, so müssen wir den in den Molekülen bewegten Elektronen gewisse Eigenschwingungen zuschreiben. Um die Existenz

dieser Eigenschwingungen zu verstehen, nimmt die Elektronentheorie an, daß auf die Elektronen gewisse *quasielastische Kräfte* wirken, d. h. Kräfte, welche der jeweiligen Entfernung aus der Gleichgewichtslage proportional sind. Da die Elektronen Trägheit besitzen, so würde hierdurch die Möglichkeit von Eigenschwingungen bestimmter Frequenz gegeben sein. Freilich ist so nur ein Rätsel auf ein anderes zurückgeführt. Denn es entsteht nun die Frage, welcher Art jene quasielastische Kraft ist, ob sie ihrerseits elektrischen Ursprunges ist, etwa von der positiven Elektrizität herrührend, oder ob sie von der wägbaren Materie auf die Elektronen ausgeübt wird. Auch die große Zahl der Spektrallinien jedes einzelnen chemischen Elementes bereitet der Erklärung Schwierigkeiten. Soll man annehmen, daß jedes Molekül des Quecksilberdampfes alle die Spektrallinien aussendet, oder strahlt das eine Molekül diese, das andere jene Linie aus? Im ersteren Falle wäre dem Molekül eine große Zahl elektrischer Eigenschwingungen zuzuschreiben, und das einfache Modell des elektrischen Dipols würde dann nicht zur Darstellung des Feldes ausreichen. Im zweiten Fall jedoch würde die Existenz der merkwürdigen Gesetzmäßigkeiten, welche die Spektrallinien mancher Körper aufweisen, schwer verständlich sein. Die Fragen der molekularen Struktur, die mit dem Probleme der Spektrallinien zusammenhängen, sind leider noch wenig aufgeklärt. Wir müssen uns damit begnügen, an unserem einfachsten elektromagnetischen Modell festhaltend, jede Spektrallinie einem anderen Dipol zuzuschreiben und die Eigenschwingungen formal durch Einführung quasielastischer Kräfte zur Darstellung zu bringen. Wir gelangen so zu einem Ansatz, der als Arbeitshypothese gute Dienste leistet.

Wir setzen die Schwingungsgleichung des elektrischen Dipols in der Form an:

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + k^2\mathfrak{p} = 0; \tag{56}$$

nach (52) können wir schreiben

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\frac{m}{e}k^2\mathfrak{p} = \frac{m}{|e|}k^2\mathfrak{p}. \tag{56a}$$

Hier steht rechts die quasielastische Kraft, welche das mit der trägen Masse m behaftete Elektron in die Gleichgewichtslage zurückzieht. Der Schwingungsvorgang wird von den Anfangsbedingungen abhängen; wir können uns etwa vorstellen, daß durch den Zusammenstoß mit einem anderen Molekül die Schwingungen des Elektrons angeregt werden. Wie dem auch sei, jedenfalls wird während der Schwingung das Zeitmittel der kinetischen Energie dem Zeitmittel der potentiellen gleich sein. Die gesamte Energie des schwingenden Dipols ist konstant; sie beträgt

$$W = m\overline{\mathfrak{v}^2} = \frac{m}{e^2}\overline{\left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\right)^2}, \tag{56b}$$

wobei die horizontalen Striche die Bildung des zeitlichen Mittelwertes andeuten.

Wir haben oben gesehen, daß der schwingende Dipol fortgesetzt Energie ausstrahlt. Diese Ausstrahlung wird nun zu einer Dämpfung der Schwingungen Veranlassung geben müssen. Wir wollen den Betrag dieser Dämpfung berechnen. Aus (55) folgt

$$-\frac{dW}{dl} = \frac{2}{3}\overline{\ddot{\mathfrak{p}}^2} \tag{56c}$$

für die Abnahme der Schwingungsenergie, berechnet auf den Lichtweg $l = 1$ cm, d. h. die Abnahme während der Zeit

$$t = \frac{1}{c} = \frac{1}{3}10^{-10} \text{ sec.}$$

Während dieser Zeit hat das Elektron eine große Zahl von Schwingungen ausgeführt — $2 \cdot 10^4$ für $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm —, so daß die Mittelwertsbildung über sehr viele Schwingungen gerechtfertigt ist. Anderseits können wir (56b) nach Einführung der spezifischen Ladung des Elektrons (Gleichung 9) schreiben:

$$W = \frac{c}{\eta e}\overline{\dot{\mathfrak{p}}^2}. \tag{56d}$$

Da die Punkte in $\dot{\mathfrak{p}}$, $\ddot{\mathfrak{p}}$ Differentiation nach l andeuten, so gilt

$$\overline{\ddot{\mathfrak{p}}^2} : \overline{\dot{\mathfrak{p}}^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2.$$

Wir erhalten daher

$$-\frac{d\ln W}{dl} = \frac{2}{3}\frac{\eta e}{c}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2.$$

Es nimmt die Schwingungsenergie nach dem Gesetze ab:

$$W = W_0 e^{-\gamma l}, \tag{56e}$$

wo der Abklingungskoeffizient

$$\gamma = \frac{8\pi^2}{3}\frac{\eta e}{c\lambda^2} \tag{56f}$$

zu setzen ist. Dasselbe Exponentialgesetz gilt für die Abnahme der Intensität der entsandten Strahlung; dem Lichtwege 1 cm entspricht ein Herabsinken der Lichtintensität auf den Bruchteil $e^{-\gamma}$.

Nun läßt sich aber aus Interferenzversuchen eine obere Grenze für die Abnahme der Strahlungsintensität gewinnen. Für manche Spektrallinien, z. B. für die grüne Quecksilberlinie, haben sich nämlich Interferenzen bei sehr hohen Gangunterschieden herstellen lassen. Die Verfeinerung der Technik solcher Interferenzversuche, um die sich A. Michelson, O. Lummer und andere Experimentatoren verdient gemacht haben, hat zu sichtbaren Interferenzen noch bei Gangunterschieden von 50 cm geführt. Wäre nun die Abklingungkonstante γ so groß, daß sich auf einem Lichtwege von 40 cm ein Herabsinken der Intensität des Lichtes auf ein Hundertstel ihres Wertes oder einen noch geringeren Bruchteil ergäbe, so könnte die Theorie von diesen Interferenzversuchen nicht Rechenschaft geben. Wir wollen sehen, welcher Wert von γ sich aus (56f) ergibt.

Wir setzen für e und η die in (2) und (9) angegebenen Werte ein, nehmen $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ an und finden

$$\gamma = \frac{8\pi^2}{3} \cdot \frac{1{,}865 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 10^{10} \cdot 25 \cdot 10^{-10}} = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Daraus ergibt sich für einen Lichtweg von 50 cm ein Herabsinken der Lichtintensität auf den Bruchteil

$$e^{-\gamma \cdot 50} = e^{-0{,}1} = 0{,}9;$$

es würde hiernach bei einem Gangunterschied von 50 cm noch sehr wohl eine Interferenz bemerkbar sein. Man könnte sich eher darüber wundern, daß nicht bei noch höheren Gangunterschieden Interferenzen sich herstellen lassen. Allein außer der Dämpfung durch Strahlung dürften noch andere Ursachen mitspielen, die den regelmäßigen Verlauf des Schwingungsvorganges beeinträchtigen. So dürfte z. B. beim Stoße zweier Moleküle des Dampfes der ursprüngliche Schwingungsvorgang gestört und eine neue, mit einer anderen Phase einsetzende Schwingung eingeleitet werden.

In der Schwingungsgleichung (56) bzw. (56a) ist der Dämpfung durch Strahlung nicht Rechnung getragen worden. Wir wollen jetzt nachträglich die Schwingungsgleichung so modifizieren, daß der durch (55) in allgemeinster Weise angegebene Energieverlust zum Ausdrucke gelangt. Wir führen in (56a) eine „dissipative Kraft $\mathfrak{K}^s$“ ein, indem wir schreiben

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\frac{m}{e}k^2\mathfrak{p} + \mathfrak{K}^s. \tag{57}$$

Diese dissipative Kraft $\mathfrak{K}^s$ stellt die Rückwirkung der Strahlung auf das bewegte Elektron dar. Ihre Arbeitsleistung muß mit dem Energieverluste (55) durch die Relation verknüpft sein:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\mathfrak{K}^s, \mathfrak{v})\,dt = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)^2 dt; \tag{57a}$$

dabei bezeichnen t_1, t_2 zwei, etwa durch eine ganze Schwingung getrennte Zeitpunkte, zu denen die Beschleunigung des Elektrons gleich Null ist. Während des Zeitintervalles von t_1 bis t_2 wird eine bestimmte Energiemenge entsandt; dieser muß die gesamte, in der gleichen Zeit von der rückwirkenden Kraft $\mathfrak{K}^s$ geleistete Arbeit entgegengesetzt gleich sein. Würde etwa zur Zeit t_1 die ungleichförmige Bewegung des Elektrons beginnen und zur Zeit t_2 endigen, so würde die gesamte Arbeit von $\mathfrak{K}^s$ und die gesamte Energie der entsandten Wellenstrahlung in den Ausdrücken (57a) enthalten sein.

Wir können nun die rechte Seite von (57a) durch partielle Integration umformen; da die Beschleunigung an den Grenzen des Integrationsintervalles verschwindet, so wird

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathfrak{v}\,\mathfrak{K}')\,dt = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathfrak{v},\,\frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}\right)dt.$$

Wir erfüllen also die Energiegleichung, indem wir setzen

$$\mathfrak{K}' = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}, \tag{58}$$

d. h. indem wir die Reaktionskraft der Strahlung dem zweiten Differentialquotienten des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit proportional annehmen. Diese dissipative Kraft wirkt mithin nach einem anderen Gesetze, als die Reibungskraft der gewöhnlichen Mechanik, welche man der Geschwindigkeit proportional zu setzen pflegt. Man sieht sofort, daß man, durch Annahme einer Proportionalität mit $\mathfrak{v}$, $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$, oder auch mit $\frac{d^3\mathfrak{v}}{dt^3}$ oder irgendeinem höheren Differentialquotienten, oder auch einem Aggregate derartiger Glieder nicht den richtigen Wert (57a) der Arbeitsleistung erhalten könnte. Wir wollen an dieser Stelle auf etwaige Bedenken, die der obigen Ableitung von $\mathfrak{K}'$ entgegengestellt werden könnten, nicht eingehen, da wir weiter unten (in § 15) von einem allgemeineren Standpunkte aus die Behandlung der Frage wieder aufnehmen werden.[1])

Durch Einführung des Ausdruckes (58) von $\mathfrak{K}'$ in (57) erhalten wir

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\frac{m}{e}k^2\mathfrak{p} + \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\frac{d^2\mathfrak{v}}{dt^2}; \tag{58a}$$

diese allgemeine Schwingungsgleichung tritt nunmehr an Stelle von (56a). Gemäß (52) kann hierfür geschrieben werden

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{m\,c^3}\,\frac{d^3\mathfrak{p}}{dt^3} + k^2\mathfrak{p} = 0. \tag{58b}$$

---

1) H. A. Lorentz (Enzykl. d. mathem. Wissensch. V. Art. 14 Nr. 20) gibt eine direktere Ableitung von (58).

Die Schwingungsgleichung des elektrischen Dipoles wird also bei Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung eine Differentialgleichung dritter Ordnung.[1])

§ 10. Der Zeeman-Effekt.

Daß das elektromagnetische Modell eines lichtemittierenden Moleküles, welches wir soeben kennen lernten, in manchen Fällen der Wirklichkeit entspricht, dafür ist der experimentelle Beweis durch die Entdeckung P. Zeemans[2]) erbracht worden. Dieser Forscher hat gezeigt, daß die Spektrallinien in starken magnetischen Feldern gewisse Veränderungen erfahren; diese Veränderungen haben sich in den meisten Fällen ohne weiteres auf Grund der Lorentzschen Theorie deuten lassen. Wir dürfen nicht versäumen, den Zeeman-Effekt aus der im vorigen Paragraphen entwickelten Theorie abzuleiten.

Führen wir, der Grundgleichung V gemäß, die von dem äußeren Magnetfelde auf das Elektron ausgeübte Kraft in die Bewegungsgleichung (56a) ein, so lautet diese

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\frac{m}{e}k^2\mathfrak{p} + \frac{e}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{H}\right],$$

oder, wenn wir überall, nach (52), die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Elektrons durch das elektrische Moment $\mathfrak{p}$ des Dipols ersetzen und die spezifische Ladung $\eta = \frac{|e|}{cm} = \frac{-e}{cm}$ des negativen Elektrons einführen:

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + k^2\mathfrak{p} = -\eta\left[\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\mathfrak{H}\right]. \tag{59}$$

Dabei haben wir das Dämpfungsglied wiederum fortgelassen, weil der äußerst geringe Betrag der Dämpfung für die Frequenzen der Eigenschwingungen nicht wesentlich in Betracht kommt.

Wir legen der Integration der Schwingungsgleichung (59) sofort ein geeignetes Koordinatensystem zugrunde. Die z-Achse

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 60, S. 577. 1897.

2) P. Zeeman. Phil. Mag. 43, S. 226 u. 44, S. 255. 1897.

mag in Richtung der magnetischen Kraftlinien weisen, während die (xy)-Ebene auf diesen senkrecht steht; dann ergibt die Komponentenzerlegung

(59a)
$$\frac{d^2\mathfrak{p}_x}{dt^2} + k^2\mathfrak{p}_x = -\eta\,|\mathfrak{H}|\,\frac{d\mathfrak{p}_y}{dt},$$

(59b)
$$\frac{d^2\mathfrak{p}_y}{dt^2} + k^2\mathfrak{p}_y = +\eta\,|\mathfrak{H}|\,\frac{d\mathfrak{p}_x}{dt},$$

(59c)
$$\frac{d^2\mathfrak{p}_z}{dt^2} + k^2\mathfrak{p}_z = 0.$$

Die Schwingungskomponente parallel den magnetischen Kraftlinien wird demnach von dem magnetischen Felde nicht beeinflußt. Setzen wir

$$\mathfrak{p}_z = Ce^{i\nu t},$$

so ist die Frequenz $\nu = k$ die gleiche, welche allen drei Schwingungskomponenten außerhalb des magnetischen Feldes zukommt.

Was aber die Schwingungen in der (xy)-Ebene anbelangt, so sind die Komponenten $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$ durch das magnetische Feld miteinander verkoppelt, wie die Gleichungen (59a, b) anzeigen. Das läßt vermuten, daß wir hier zwei voneinander und von der ursprünglichen Frequenz k abweichende Frequenzen ν' und ν'' erhalten werden. Wir versuchen die Differentialgleichungen (59a, b) durch den Ansatz

(60)
$$\mathfrak{p}_x = ae^{i\nu t}, \quad \mathfrak{p}_y = be^{i\nu t}$$

zu befriedigen, wo a und b zwei komplexe, für Amplitude und Phase der beiden Komponenten maßgebende Konstanten sind. Wir finden

(60a)
$$\begin{cases} a\,(k^2 - \nu^2) = -\eta\,|\mathfrak{H}|\,bi\nu, \\ b\,(k^2 - \nu^2) = +\eta\,|\mathfrak{H}|\,ai\nu. \end{cases}$$

Durch Elimination von a und b wird für ν^2 die quadratische Gleichung erhalten

$$(\nu^2 - k^2)^2 = \eta^2\,|\mathfrak{H}|^2\,\nu^2.$$

Bezeichnen wir mit ν' die kleinere, mit ν'' die größere der beiden Frequenzen, so erhalten wir

(60b) $$\begin{cases} \nu'^2 - k^2 = -\eta\,|\mathfrak{H}|\,\nu', \\ \nu''^2 - k^2 = +\eta\,|\mathfrak{H}|\,\nu'', \end{cases}$$

oder, weil nur positive Werte von ν', ν'' zulässig sind:

(60c) $$\begin{cases} \nu' = -\frac{1}{2}\eta\,|\mathfrak{H}| + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}\eta^2\,|\mathfrak{H}|^2}, \\ \nu'' = +\frac{1}{2}\eta\,|\mathfrak{H}| + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}\eta^2\,|\mathfrak{H}|^2}. \end{cases}$$

Es werden also von den zu den Magnetkraftlinien senkrechten Schwingungskomponenten des Dipols zwei Spektrallinien entsandt, deren Frequenzen voneinander und von der ursprünglichen Frequenz k abweichen.

Der Abstand der beiden Spektrallinien, in der Skala der Frequenzen gemessen, beträgt

(60d) $$\nu'' - \nu' = \eta\,|\mathfrak{H}|,$$

er ist gleich dem Produkte aus der spezifischen Ladung der schwingenden Elektronen und der magnetischen Feldstärke.

Die ursprüngliche Frequenz k entspricht nach (60c) nicht genau der Mitte der beiden abgeänderten Frequenzen ν', ν''. Doch ergibt sich das Produkt $\eta\,|\mathfrak{H}|$ für alle herstellbaren Felder so gering — nur mit intensiven Feldern gelingt überhaupt die Trennung der Linien —, daß das Quadrat dieses Produktes in (60c) zu vernachlässigen ist, und daß mit genügender Annäherung gesetzt werden darf:

(60e) $$\frac{\nu' + \nu''}{2} = k.$$

Um nun den Charakter der stattfindenden Schwingungen zu erkennen, müssen wir das Verhältnis der Konstanten a, b aus einer der Gleichungen (60a) ermitteln. Für die langsamere der beiden Schwingungen, von der Frequenz ν', folgt aus (60a, b)

(60f) $$\frac{b'}{a'} = \frac{\nu'^2 - k^2}{i\nu'\eta\,|\mathfrak{H}|} = +i,$$

für die schnellere der beiden Schwingungen, von der Frequenz ν'',

(60g) $$\frac{b''}{a''} = \frac{\nu''^2 - k^2}{i\nu''\eta\,|\mathfrak{H}|} = -i.$$

Es sind also, sowohl für die langsamere, wie für die schnellere Schwingung, die Amplituden der beiden Komponenten $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$ die gleichen; die Phasen jedoch weichen um $\frac{\pi}{2}$ voneinander ab. Beides sind demnach zirkulare Schwingungen. Bei der langsamen Schwingung ist, nach (60f), die y-Komponente der x-Komponente um $\frac{\pi}{2}$ an Phase voran, d. h. die Kreisbewegung führt, nach einer Viertelschwingung, von der y-Achse zur x-Achse, sie stellt also eine negative Drehung um die mit der z-Achse zusammenfallende Richtung des magnetischen Feldes dar. Einem auf der Seite der positiven z-Achse befindlichen Beobachter erscheint die Kreisschwingung als Drehung im Sinne des Uhrzeigers, oder als rechts-zirkulare Schwingung. Bei der schnelleren Schwingung hingegen ist nach (60g) die x-Komponente der y-Komponente um $\frac{\pi}{2}$ an Phase voran, diese Bewegung entspricht einer positiven Umkreisung der z-Achse und erscheint einem auf der Seite der positiven z-Achse befindlichen Beobachter als linkszirkulare, dem Uhrzeigersinne entgegengesetzte Schwingung.

Wir denken uns jetzt die Flamme zwischen den Polen des Magneten; auf derjenigen Seite, nach der das magnetische Feld gerichtet ist, mag der Magnet durchbohrt sein. Was wird ein durch das Loch hindurchblickender Beobachter wahrnehmen?

Für diesen Beobachter kommen nur die Schwingungen in der (xy)-Ebene in Betracht; denn wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, daß nur die zur Blickrichtung senkrechten Komponenten der Elektronenbewegung für die ausgestrahlten Wellen maßgebend sind. Die der z-Achse parallele Komponente sendet daher den Magnetkraftlinien parallel kein Licht aus. Der Beobachter wird also bei spektraler Zerlegung des Lichtes die ursprünglich einfache Spektrallinie verdoppelt finden. Dieses Duplet von Linien ist zirkularpolarisiert, und zwar erscheint dem Beobachter, welcher den Kraftlinien des magnetischen Feldes entgegenblickt, die im Spektrum auf der roten Seite liegende

Linie rechtszirkular, die auf der violetten Seite liegende linkszirkular polarisiert. Die Beobachtung des „longitudinalen Zeeman-Effektes“ hat in der Tat ein derartiges Duplet ergeben, wenigstens für die Mehrzahl der untersuchten Spektrallinien. Hieraus ist zu schließen, daß das negative Elektron es ist, welches die Spektrallinien ausstrahlt. In der Tat haben wir, bei der Aufstellung der Grundgleichung (59), die negative Ladung des Elektrons bereits berücksichtigend

$$\eta = \frac{|e|}{cm} = \frac{-e}{cm}$$

gesetzt. Für die positiven Elektronen wäre in (59) das Vorzeichen von η umzukehren, mithin auch in (60a); so würde sich für die beiden Kreisschwingungen das entgegengesetzte Verhalten ergeben, indem die rechts-zirkulare die schnellere, die links-zirkulare die langsamere sein müßte. Der Zeeman-Effekt zeigt also, daß die im vorigen Paragraphen gegebene Spezialisierung des elektromagnetischen Modelles einer Lichtquelle, welche den periodischen Wechsel des Dipoles auf die Schwingungen des negativen Elektrons zurückführt, für die betreffenden Spektrallinien zutreffende Folgerungen ergibt. Die Messung des Abstandes der beiden Linien des Duplets gestattet es, wenn die magnetische Feldstärke bekannt ist, auf Grund von (60d) die spezifische Ladung η zu bestimmen. Der von C. Runge und F. Paschen gefundene Wert

$$\eta = 1{,}68 \cdot 10^7 \tag{61}$$

stimmt mit dem bei Kathodenstrahlen erhaltenen (vgl. § 2, Gl. 9) so gut überein, als es bei der Schwierigkeit dieser Messungen zu erwarten ist.

Übrigens hat sich auch die Forderung der Theorie, daß der Abstand der Komponenten des Duplets, in der Skala der Frequenzen gemessen, für alle Linien bei gegebenem magnetischen Felde der gleiche, und der magnetischen Feldstärke proportional ist, in den Fällen bestätigt, wo überhaupt die einfache Zerlegung in ein Duplet gefunden wurde.

Was wird nun ein Beobachter wahrnehmen, der das senkrecht zu den Magnetkraftlinien ausgestrahlte Licht spektral zerlegt? Er wird nach § 9 die Projektion der Schwingung auf eine zur Blickrichtung senkrechte, also den magnetischen Kraftlinien des Feldes parallele Ebene beobachten. In der Projektion ergeben aber die beiden zirkularen Schwingungen geradlinige Schwingungen von den Frequenzen ν' und ν'', senkrecht zu den Kraftlinien. Hierzu tritt nun noch die Schwingung $\mathfrak{p}_z$ parallel den Kraftlinien, deren Frequenz diejenige der ursprünglichen Spektrallinie ist. Der Beobachter wird also ein Triplet von Linien wahrnehmen; in den beiden äußeren Linien finden die elektrischen Schwingungen senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien des äußeren Feldes statt; diese sind also geradlinig parallel den Kraftlinien polarisiert. Die innere Linie hingegen ist senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien polarisiert; in ihr finden die Schwingungen des elektrischen Vektors parallel den Kraftlinien des Magnetfeldes statt, in dem sich die Flamme befindet. Auch diese Beschreibung des „transversalen Zeeman-Effektes“ entspricht, bei den meisten Spektrallinien, der Beobachtung.

Diese einfache Form weist die Veränderung der Spektrallinien im magnetischen Felde jedoch keineswegs in allen Fällen auf. Manche Spektrallinien, z. B. die gelben Natriumlinien D_1 und D_2, teilen sich, anstatt in drei, in vier oder in sechs Linien; gewisse Linien des Quecksilberspektrums weisen, bei Beobachtung senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien, sogar eine Teilung in neun Linien auf. Wie die sorgfältigen Untersuchungen von C. Runge und F. Paschen[1]) ergeben haben, sind es gerade die Serienlinien, die solche anomalen Zeeman-Effekte zeigen. Diese Untersuchungen haben sehr bemerkenswerte Gesetzmäßigkeiten festgestellt. Alle Linien einer und derselben Serie weisen die gleiche Zerlegung im magnetischen Felde auf, sowohl

1) C. Runge u. F. Paschen. Sitzungsber. d. Berl. Ges. d. Wissensch. 1902, S. 380 u. 720. Vgl. den Artikel von C. Runge in H. Kaysers Handbuch der Spektroskopie Bd. II.

was die Zahl, als auch was den in der Skala der Frequenzen gemessenen Abstand der getrennten Linien anbelangt. Ja sogar die Linien verschiedener Elemente, die einer und derselben Gruppe des Mendelejeffschen Systemes angehören, besitzen meist den gleichen Zeeman-Effekt, wenn sie entsprechenden Serien angehören. Der Zeeman-Effekt ist ein charakteristisches Merkmal für die betreffende Serie; er hat es in einigen Fällen ermöglicht, bis dahin noch nicht in Serien eingeordneten Linien ihren richtigen Platz anzuweisen.

Das in den beiden letzten Paragraphen entwickelte einfache Modell eines leuchtenden Moleküles erweist sich, wie wir sehen, gerade für die Serienlinien als unzulänglich, da diese Linien anomale Zeeman-Effekte zeigen. In der Tat konnten wir das Bild eines einzelnen, unter dem Einflusse einer quasielastischen Kraft um eine stabile Gleichgewichtslage schwingenden Elektrons nur als eine provisorische Arbeitshypothese betrachten. Es ist merkwürdig genug, daß dieses Bild wenigstens für die isolierten Linien von der Beobachtung bestätigt wird. Es ist bisher noch nicht gelungen, die anomalen Zeeman-Effekte vom Standpunkte der Elektronentheorie aus in befriedigender Weise zu deuten. Die von C. Runge und F. Paschen entdeckten Gesetzmäßigkeiten lassen vermuten, daß eine befriedigende Erklärung nur in Verbindung mit der Theorie der Spektralserien möglich sein wird. Jenes einfache elektrische Modell eines Moleküles oder Atomes wird dabei zweifellos durch ein komplizierteres zu ersetzen sein. Da unsere Kenntnisse der elektrischen Struktur der Atome und Moleküle der Materie nur gering sind, so ist dabei der Hypothesenbildung ziemlich freies Spiel gelassen. Anderseits sind die von Balmer, Kayser und Runge, Rydberg und Ritz für die Wellenlängen der Spektralserien aufgestellten Formeln so genau gültig, daß sie ein recht scharfes Kriterium für die Zulässigkeit einer derartigen Hypothese bilden. Die Deutung jener Spektralformeln, welche gleichzeitig die Theorie der anomalen Zeeman-Effekte der Serienlinien ergeben müßte, ist wohl die wichtigste und die schwierigste Aufgabe der elektromagnetischen Lichttheorie. Daß die Elektronentheorie nicht ganz

auf der falschen Fährte ist, zeigt der Umstand, daß hinsichtlich der Polarisation die anomalen Zeeman-Effekte den normalen ähnlich sind. So weisen z. B. von den neun Linien, in welche gewisse Linien des Quecksilbers im magnetischen Felde sich spalten, die drei inneren dieselbe Polarisation auf, wie die innere Linie des einfachen Triplets, während die äußeren Linien ebenso polarisiert sind, wie die äußeren Linien des Triplets bzw. Duplets, nämlich bei Strahlung senkrecht zum magnetischen Felde geradlinig parallel den Kraftlinien, bei Strahlung parallel dem magnetischen Felde zirkular. Auch ist die Größenordnung der Linienabstände, und der Sinn der Zirkularpolarisation, derselbe, wie bei dem einfachen Duplet und Triplet. Das läßt vermuten, daß auch hier die negativen Elektronen in Bewegung begriffen sind, freilich unter weniger einfachen Bedingungen.

Bei der Strahlung der Bandenspektren ist es bisher nicht gelungen, einen Zeeman-Effekt des magnetischen Feldes nachzuweisen. Man kann im Zweifel sein, ob dieses Licht von Elektronen ausgesandt wird, die mit Atomen der wägbaren Materie verkoppelt sind, oder ob es den Schwingungen der positiven Elektronen seinen Ursprung verdankt. Es ist vielleicht nicht ganz ausgeschlossen, daß es mit Hilfe einer verfeinerten optischen Technik einst gelingen wird, über diese Frage Auskunft zu erhalten.

§ 11. Die elektromagnetischen Potentiale einer bewegten Punktladung.

In § 9 haben wir bei der Berechnung des Hertzschen Vektors für eine schwingende Punktladung uns gewisse Vernachlässigungen gestattet. Wir haben angenommen, daß die Bewegung der Ladung auf einen Bereich sich erstreckt, dessen Abmessungen klein gegen die Entfernung der Punktladung vom Aufpunkte sind. Sodann haben wir die Geschwindigkeit der bewegten Ladung als klein gegen die Lichtgeschwindigkeit angesehen. Diese Voraussetzungen wollen wir jetzt fallen lassen. W i r b e t r a c h t e n e i n E l e k t r o n, w e l c h e s s i c h

beliebig im Raume bewegen kann; seine Geschwindigkeit soll zunächst beliebig groß angenommen werden. Wir lassen indessen auch jetzt noch die Größe und Gestalt des Elektrons unberücksichtigt, indem wir dasselbe wie eine Punktladung behandeln. Wie wir bereits früher erwähnten, ist es vom Standpunkte der Nahewirkungstheorie aus undenkbar, daß eine endliche Elektrizitätsmenge auf einen mathematischen Punkt zusammengedrängt wird, da dieses einen unendlichen Wert der Feldenergie ergeben würde. Wir werden diese Bemerkung später bestätigt finden und werden der Dynamik des Elektrons bestimmte Annahmen über seine Form und Bewegungsfreiheit zugrunde legen. Immerhin werden sich die Abmessungen des Elektrons so gering — von der Ordnung 10^{-13} cm — ergeben, daß es für manche Zwecke ausreichend ist, das Elektron als Punktladung zu betrachten. Das wird selbstverständlich nur für solche Aufpunkte erlaubt sein, deren Abstand vom Elektron groß gegen dessen Abmessungen ist. Dieser Bedingung genügen jedenfalls die in der Wellenzone gelegenen Aufpunkte. Daher werden wir die Formeln dieses Paragraphen insbesondere zur Ermittelung der von einem rasch bewegten Elektron entsandten Wellenstrahlung verwerten können. Wir werden so der in § 9 entwickelten Theorie der ruhenden Lichtquelle eine Theorie der bewegten Lichtquelle an die Seite stellen und werden anderseits gewisse Konsequenzen der Stokes-Wiechertschen Hypothese entwickeln, welche die Röntgenstrahlen als die beim Aufprall der Kathodenstrahlen auf die Antikathode entsandte Wellenstrahlung anspricht. Diese Folgerungen sind gerade dadurch bemerkenswert, daß sie sich auf den Grenzfall eines Elektrons von verschwindenden Abmessungen beziehen. Welche Voraussetzungen man auch über die Gestalt des Elektrons machen möge, beim Grenzübergang zu verschwindend kleinen Abmessungen muß sich stets dasselbe Resultat ergeben. Freilich ist dieser Grenzübergang, wie wir sehen werden, nicht immer erlaubt. In allen Fällen jedoch, in denen er erlaubt ist, sind die Ergebnisse als Folgerungen der Grundhypothesen der Elektronentheorie

allein anzusehen, die in den Grundgleichungen (I) bis (V) formuliert sind.

Wir bestimmen die elektromagnetischen Potentiale der Punktladung auf Grund der allgemeinen Formeln (50, 51). Wir denken uns eine Elektrizitätsmenge e, die einen gewissen endlichen Bereich erfüllt. Die Entfernung des Aufpunktes P soll groß sein gegen die Abmessungen jenes Bereiches. Wir erinnern uns der Deutung mit Hilfe der auf den Aufpunkt hin sich mit Lichtgeschwindigkeit kontrahierenden Kugel, durch die wir die Formeln (50a) und (51a) erläuterten. Für unseren Aufpunkt P ist der Radius λ der Kugel groß gegen die Abmessungen der Flächenstücke f, in denen sie das bewegte Elektron schneidet; es sind mithin diese Flächenstücke mit genügender Annäherung als eben zu betrachten; durch diese Ebenen wird das Elektron in dünne Scheiben von der Höhe dh zerschnitten; die einzelne Scheibe enthält die Elektrizitätsmenge $f \varrho \, dh = de$.

Nun bezieht sich die Integration in (50) nicht auf die Volumelemente des bewegten Elektrons, sondern auf die jeweils von Elektrizität erfüllten Volumelemente des Raumes. Will man den Beitrag

$$\lambda \, d\lambda \, d\omega \, \varrho = df \varrho \frac{d\lambda}{\lambda}$$

berechnen, den die Elektrizitätsmenge de der einzelnen Scheibe zu dem Werte von Φ im Aufpunkte beisteuert, so muß man den Abstand $d\lambda$ der beiden Lagen der sich kontrahierenden Kugel berechnen, wo diese in die elektrizitätserfüllte Scheibe eintritt bzw. aus dieser austritt; dieser Abstand ist im Raume, nicht im bewegten Elektron gemessen zu denken. Es ist aber nicht schwer, $d\lambda$ zu berechnen. Setzen wir

$$d\lambda = c \, d\tau,$$

so ist $d\tau$ die Zeit, während deren die mit der Geschwindigkeit c durch den Raum eilende Fläche über die Scheibe von der Höhe dh hinwegstreicht. Diese Zeit berechnet sich als Quotient aus der Höhe dh und der dieser Höhe parallelen Komponente der Relativgeschwindigkeit der bewegten Fläche

und der bewegten Scheibe. Die Kugel bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit (c) senkrecht zu der Grundfläche der Scheibe, während die Geschwindigkeit der Scheibe durch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Elektrons sich bestimmt; und zwar ist die Komponente von $\mathfrak{v}$ in Richtung nach dem Mittelpunkte der Kugel, d. h. in Richtung des vom Elektron nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ zu nehmen. Folglich ist die entsprechende Komponente der Relativgeschwindigkeit von Kugel und Scheibe gleich $c - \mathfrak{v}_r$. Es ist also die Zeit $d\tau$, während deren die Kugel die Scheibe überstreicht:

$$d\tau = \frac{dh}{c - \mathfrak{v}_r},$$

und daher

(62)
$$d\lambda = c\,d\tau = \frac{dh}{1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}}.$$

Wir haben soeben stillschweigend angenommen, daß $c > \mathfrak{v}_r$ ist, d. h. daß das Elektron von der sich kontrahierenden Kugel überholt wird. Bewegt sich hingegen das Elektron mit Überlichtgeschwindigkeit, so kann der Fall eintreten, daß es, die kontrahierende Kugel überholend, von außen nach innen durch dieselbe hindurchtritt. In diesem Falle ist die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r - c$, und es ist

(62a)
$$d\lambda = \frac{dh}{\frac{\mathfrak{v}_r}{c} - 1}$$

zu setzen. Allgemein ist zu schreiben

(62b)
$$d\lambda = \frac{dh}{\left|1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right|}.$$

Doch wollen wir zunächst $|\mathfrak{v}| < c$ annehmen und an (62) die weitere Betrachtung anknüpfen.

Wir erhalten als Beitrag unserer Scheibe zum skalaren elektromagnetischen Potential im Aufpunkte

(62c)
$$df\varrho\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{df\varrho\,dh}{\lambda}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)} = \frac{de}{r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)}.$$

Es bleibt nur die Integration über die einzelnen Scheiben übrig. Da der Abstand r des Aufpunktes als groß gegen die Abmessungen des Elektrons angesehen wurde, so ist er bei der Integration konstant zu halten. Die Integration ist daher ohne weiteres auszuführen, falls es auch erlaubt ist, $\mathfrak{v}$ als konstant anzusehen für diejenige Zeit, während deren die Kugel über das Elektron hinwegstreicht. Sie ergibt in diesem Falle

$$\Phi = \frac{e}{r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)} \tag{63}$$

als Wert des skalaren elektromagnetischen Potentiales für Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit.

In dem Grenzfalle einer Punktladung ist es natürlich ohne weiteres gestattet, $\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)$, ebenso wie r, bei der Integration über das Elektron als konstant anzusehen. Da wir indessen diesen Grenzfall nicht als streng verwirklicht betrachten, so bedeutet die Konstantsetzung dieser Größen eine gewisse Einschränkung des Gültigkeitsbereiches der Formel (63). Erstens ist diese Formel, wie schon erwähnt, nur auf solche Aufpunkte anzuwenden, deren Abstand vom Elektron groß gegen die Abmessungen des Elektrons ist. Schließen wir das Elektron in eine Kugel vom Radius a ein, so muß

$$r \text{ groß gegen } a \tag{63a}$$

sein. Zweitens aber muß, damit die Veränderung von $\frac{\mathfrak{v}_r}{c}$ in der Zeit $\frac{2a}{c - \mathfrak{v}_r}$, während deren die Kugel über das Elektron hinwegstreicht, für keinen der Aufpunkte in Betracht kommt,

$$\frac{|\dot{\mathfrak{v}}|\, 2a}{c\,(c - |\mathfrak{v}|)} \text{ klein gegen } 1 \tag{63b}$$

sein ($\dot{\mathfrak{v}}$ stellt den Beschleunigungsvektor dar).

Nur dann, wenn die Abmessungen des Elektrons so klein, die Beschleunigung so gering und die Geschwindigkeit von der Lichtgeschwindigkeit so entfernt ist, daß die Bedingungen (63a) und (63b)

erfüllt sind, ist es gestattet, das Elektron durch eine Punktladung zu ersetzen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so läßt sich die Berechnung des Vektorpotentiales nach der Formel (51) in entsprechender Weise durchführen. Es tritt nur an die Stelle des Skalars ϱ der durch (10) bestimmte Vektor $\varrho \frac{\mathfrak{v}}{c}$. Schließen wir Rotationen des Elektrons aus, so ist der Beitrag jeder einzelnen Scheibe zum Vektorpotential

$$de \frac{\mathfrak{v}}{c} \frac{1}{r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)}.$$

Ist nun die Bedingung (63b) erfüllt, so ist auch die Änderung, welche $\frac{\mathfrak{v}}{c}$ beim Hinwegstreichen der mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Kugel über das Elektron erfährt, zu vernachlässigen, und es führt die Integration über die einzelnen Scheiben ohne weiteres zu dem Ausdruck

$$\mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{rc\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)} \tag{64}$$

des elektromagnetischen Vektorpotentiales.

Die Formeln (63) und (64) für die elektromagnetischen Potentiale einer bewegten Punktladung sind von A. Liénard[1]) und E. Wiechert[2]) abgeleitet worden. Infolge der geringen Abmessungen des Elektrons erweisen sie sich auch für ziemlich beträchtliche Beschleunigungen und bis unmittelbar an die Lichtgeschwindigkeit heran als gültig. Der Fall unstetiger Bewegung des Elektrons hingegen sowie der Fall einer beschleunigten Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit liegen nicht in ihrem Gültigkeitsbereiche, weil hier die Bedingung (63b) nicht mehr erfüllt ist. Auch ungleichförmige Bewegungen mit Überlichtgeschwindigkeit dürfen nicht auf Grund dieser Formeln behandelt werden, weil es bei solchen Bewegungen immer Auf-

1) A. Liénard, L'éclairage électrique 16. 1898. S. 5, 53, 106.

2) E. Wiechert, Arch. néerland. (2) 5. S. 549. 1900. Ann. d. Phys. 4. S. 667. 1901.

punkte gibt, wo $c - \mathfrak{v}_r = c - |\mathfrak{v}| \cos(\mathfrak{v}, \mathfrak{r})$ gleich Null wird; auf solche Aufpunkte hin eilt die kontrahierende Kugel mit derselben Geschwindigkeit wie das Elektron, so daß $\mathfrak{v}$ bei der Integration über das Elektron nicht als konstant angesehen werden darf. Auch die Anwendung auf gleichförmige Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit gibt sich dadurch als unzulässig kund, daß es Aufpunkte gibt, für welche der Nenner in (63) bzw. (64) verschwindet; diese Punkte liegen auf einem Kegel, der mit der Bewegungsrichtung den Winkel $\arcsin\left(\frac{c}{|\mathfrak{v}|}\right)$ einschließt. In solchen Aufpunkten drängen sich, da die kontrahierende Kugel stets die mit Überlichtgeschwindigkeit bewegte Punktladung durchschneidet, die zu allen vorangegangenen Zeiten entsandten Beiträge zusammen; daher rührt das Unendlichwerden der Ausdrücke (63) und (64). Dasselbe fällt fort, wenn man die Elektrizität des Elektrons auf ein Volum von endlichen, wenn auch geringen, Abmessungen verteilt annimmt. Es ist demnach für den Fall der Lichtgeschwindigkeit und der Überlichtgeschwindigkeit der Grenzübergang zur Punktladung unzulässig. Die Anwendung der Formeln (63) und (64) zur Ermittelung des Feldes eines bewegten Elektrons ist auf Bewegungen mit Unterlichtgeschwindigkeit einzuschränken.

Aus der Ableitung dieser Formeln geht hervor, daß $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{v}$ Radiusvektor vom Elektron nach dem Aufpunkt und Geschwindigkeit des Elektrons zu der Zeit t' bedeuten, als die mit Lichtgeschwindigkeit c sich kontrahierende Kugel über das Elektron fortstrich. Diese Zeit

(64a) $$t' = t - \frac{r}{c}$$

bestimmt sich für einen jeden Aufpunkt, wenn die Bewegung des Elektrons gegeben ist; denn r ist dadurch als Funktion von t' gegeben. Falls, wie weiterhin angenommen wird, die Geschwindigkeit des Elektrons kleiner als c ist, so kann die Kugel das Elektron immer nur ein einziges Mal schneiden. Es ordnet sich mithin für einen gegebenen Aufpunkt P der

Zeit t des Eintreffens der Störung die Zeit t' des Entsendens in eindeutiger Weise zu. Da offenbar

$$\frac{dr}{dt'} = -\mathfrak{v}_r \tag{64b}$$

ist, so folgt aus (64a)

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{d\left(t' + \frac{r}{c}\right)}{dt'} = 1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c},$$

oder

$$\frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}} = \frac{dt'}{dt}. \tag{64c}$$

Man kann daher die Formeln (63) und (64) auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{e}{r}\,\frac{dt'}{dt}, \\ \mathfrak{A} &= \frac{e\mathfrak{v}}{rc}\,\frac{dt'}{dt}. \end{aligned} \tag{65}$$

Aus den elektromagnetischen Potentialen folgt nach (28) und (29) das elektromagnetische Feld der bewegten Punktladung.

§ 12. Das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung.

Wir betrachten eine Punktladung, die sich gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Es mag E' (Abb. 2)

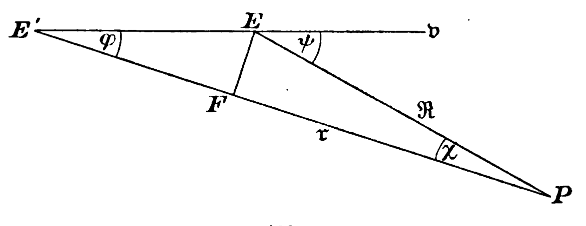


Abb. 2.

ihre Lage zur Zeit t' gewesen sein, als sie die Beiträge (63) und (64) zu den elektromagnetischen Potentialen entsandte, die zur Zeit t im Aufpunkte P eintreffen; E hingegen sei der Punkt, in dem die Ladung sich zu der Zeit t befindet. Es ist daher

$$E'P = r, \quad E'E = |\mathfrak{v}| \frac{r}{c},$$

und die Projektion von $E'E$ auf $E'P$:

$$E'F = \mathfrak{v}_r \frac{r}{c}.$$

Folglich ist

$$FP = r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right).$$

Wir können anderseits FP durch den von der gleichzeitigen Lage E des Elektrons nach dem Aufpunkte P hin gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{R}$ ausdrücken. Es ist

$$FP = R \cos \chi = R\sqrt{1 - \sin^2 \chi}.$$

Da nun aus elementargeometrischen Gründen gilt

$$\sin \chi : \sin \psi = E'E : E'P = |\mathfrak{v}| \frac{r}{c} : r = \frac{|\mathfrak{v}|}{c},$$

so folgt

$$r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right) = R\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}, \tag{66}$$

wobei abkürzungsweise gesetzt ist

$$\beta = \frac{|\mathfrak{v}|}{c} < 1. \tag{66a}$$

Da die Geschwindigkeit der Punktladung kleiner ist, als die Lichtgeschwindigkeit, so ist β ein echter Bruch.

Die Formeln (63) und (64) ergeben jetzt

$$\Phi = \frac{e}{R\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}}, \tag{66b}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{cR\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}} \tag{66c}$$

als die elektromagnetischen Potentiale der gleichförmig bewegten Punktladung. Wie man sieht, hängt ihr Wert zur Zeit t nur ab von der Lage des Aufpunktes, bezogen auf die gleichzeitige Lage des Elektrons und auf die Bewegungsrichtung. Führen wir Koordinaten X, Y, Z ein, mit E als Koordinatenursprung und der Bewegungsrichtung als X-Achse, so gilt

(67) $$\Phi = \frac{e}{s}, \quad \mathfrak{A}_x = \frac{e\beta}{s}, \quad \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}_z = 0,$$

wenn

(67a) $$s = R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi} = \sqrt{X^2 + (1-\beta^2)(Y^2+Z^2)}$$

gesetzt wird.

Bezogen auf ein mit dem Elektron mitbewegtes Bezugssystem, sind die elektromagnetischen Potentiale, und mithin die Felder des elektrischen und des magnetischen Vektors, von der Zeit unabhängig.

Indem wir das mit dem Elektron translatorisch bewegte Bezugssystem zugrunde legen, können wir das elektromagnetische Feld aus (28), (29) ohne weiteres ableiten. Wir haben nur zu beachten, daß die vom bewegten Bezugssystem aus beurteilte zeitliche Änderung des Vektors $\mathfrak{A}$ (vgl. Bd. I, Gl. 116, S. 113)

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{A} = 0$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t} = -\beta\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial X}.$$

Es ergibt daher (29)

(67b) $$\begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial X} + \beta\dfrac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial X} = -(1-\beta^2)\dfrac{\partial \Phi}{\partial X}, \\ \mathfrak{E}_y = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial Y}, \qquad \mathfrak{E}_z = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial Z}; \end{cases}$$

nach Ausführung der Differentiationen folgt

(67c) $$\mathfrak{E}_x = (1-\beta^2)\frac{e\cdot X}{s^3}, \quad \mathfrak{E}_y = (1-\beta^2)\frac{eY}{s^3}, \quad \mathfrak{E}_z = (1-\beta^2)\frac{eZ}{s^3};$$

oder, in vektorieller Schreibweise

(67d) $$\mathfrak{E} = (1-\beta^2)\frac{e\mathfrak{R}}{s^3}.$$

Der elektrische Vektor weist parallel dem von der jeweiligen Lage des Elektrons aus konstruierten Radiusvektor $\mathfrak{R}$.

Anderseits ergibt sich aus (28) für die Komponenten des magnetischen Vektors:

$$(67\text{e})\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = 0, \\ \mathfrak{H}_y = \dfrac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial Z} = \beta \dfrac{\partial \Phi}{\partial Z} = -\beta \mathfrak{E}_z, \\ \mathfrak{H}_z = -\dfrac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial Y} = -\beta \dfrac{\partial \Phi}{\partial Y} = +\beta \mathfrak{E}_y, \end{cases}$$

oder vektoriell geschrieben

$$(67\text{f})\qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{E}\right] = \frac{(1-\beta^2)\,e}{c s^3}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{R}\right].$$

Der magnetische Vektor steht senkrecht auf der Bewegungsrichtung des Elektrons und auf dem Radiusvektor $\mathfrak{R}$. Das durch (67d, f) bestimmte Feld führt die Punktladung bei ihrer Bewegung mit.

Das elektromagnetische Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung ist zuerst von O. Heaviside[1]) angegeben worden. Es entspricht dem Felde eines gleichförmig bewegten Elektrons in Entfernungen, die groß gegen die Abmessungen des Elektrons sind.

Wir berechnen noch den durch die Grundgleichung (V) bestimmten Vektor

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{H}\right];$$

derselbe gibt die elektromagnetische Kraft an, welche auf die Einheit der mitbewegten Ladung wirkt. Es ist nach (67b, e)

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{E}_x = -(1-\beta^2)\frac{\partial \Phi}{\partial X},$$

$$\mathfrak{F}_y = \mathfrak{E}_y - \beta\mathfrak{H}_z = -(1-\beta^2)\frac{\partial \Phi}{\partial Y},$$

$$\mathfrak{F}_z = \mathfrak{E}_z + \beta\mathfrak{H}_y = -(1-\beta^2)\frac{\partial \Phi}{\partial Z},$$

oder vektoriell geschrieben

$$(68)\qquad \mathfrak{F} = -\nabla\Psi,\quad \Psi = (1-\beta^2)\frac{e}{s}.$$

Die elektromagnetische Kraft auf die mitbewegte Einheit der Ladung stellt sich als negativer Gradient

1) O. Heaviside, Electrical papers. II. S. 495.

eines Skalars Ψ dar. Dieser wird das „Konvektionspotential" genannt.

Wir wollen die Flächen konstanten Konvektionspotentiales konstruieren. Diese Flächen

$$s^2 = X^2 + (1-\beta^2)(Y^2+Z^2) = \text{Constans} \tag{68a}$$

sind abgeplattete Rotationsellipsoide; ihr Mittelpunkt fällt in die Punktladung, ihre Rotationsachse in die Bewegungsrichtung; ihr Achsenverhältnis ist

$$\sqrt{1-\beta^2} : 1. \tag{68b}$$

Diese Ellipsoide werden Heaviside-Ellipsoide genannt; ihre Abplattung wächst mit wachsender Geschwindigkeit der Ladung.

Setzt man $\beta = 0$, so geht das Feld des Vektors $\mathfrak{F}$ in das elektrostatische Feld, das Konvektionspotential Ψ in das elektrostatische Potential über; die Schar der einander ähnlichen Heaviside-Ellipsoide geht in eine Schar konzentrischer Kugeln über. In der Theorie der Konvektionsstrahlung spielt das Konvektionspotential eine ähnliche Rolle, wie das elektrostatische Potential in der Elektrostatik. Die Äquipotentialflächen eines ruhenden, geladenen Körpers sind, in großer Entfernung von dem Körper, stets konzentrische Kugeln. Dementsprechend nehmen die Flächen konstanten Konvektionspotentiales in dem von einem gleichförmig bewegten Elektron erregten Felde, in großen Entfernungen vom Elektron stets die Form von Heaviside-Ellipsoiden an; senkrecht zu diesen Flächen ist die Kraft gerichtet, welche das Elektron auf eine mit gleicher Geschwindigkeit ihm parallel bewegte Ladung ausübt.

Die Feldstärken (67d, f) nehmen, mit wachsender Entfernung von der erregenden Ladung, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ab. Bei gleichförmiger Bewegung des Elektrons bildet sich demnach keine Wellenzone aus, es findet keine Energieabgabe durch Strahlung statt, sondern es wird die Energie vom Elektron konvektiv mitgeführt. Das

gleichförmig bewegte Elektron stellt eine reine Konvektionsstrahlung dar. Eine Wellenstrahlung wird nur dann entsandt, wenn die Geschwindigkeit der bewegten Ladung sich dem Betrage oder der Richtung nach ändert.

§ 13. Das Feld einer ungleichförmig bewegten Punktladung.

Die allgemeinen Formeln, welche wir in § 11 für die elektromagnetischen Potentiale einer Punktladung gewonnen haben, gestatten es, das Feld einer beliebig bewegten Punktladung zu ermitteln. Beschränken wir uns auf den Fall der Unterlichtgeschwindigkeit, auf Beschleunigungen, welche der Bedingung (63b), und auf Entfernungen, welche der Bedingung (63a) genügen, so stellen die so zu erhaltenden Formeln das Feld eines ungleichförmig bewegten Elektrons dar. Sie sind insbesondere darum von Interesse, weil sie die Wellenstrahlung eines beschleunigten Elektrons enthalten.

Wir schreiben die Ausdrücke (63, 64) der elektromagnetischen Potentiale folgendermaßen:

(69) $$\Phi = \frac{e}{s}, \quad \mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{sc},$$

wobei wir abkürzungsweise

(69a) $$s = r\left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right) = r - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{r})$$

setzen.

Dabei bedeutet $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor, der von der bewegten Punktladung nach dem festen Aufpunkte P gezogen ist. Wir nehmen die Bewegung der Punktladung als gegeben an, und betrachten demnach $\mathfrak{r}$ als bekannte Funktion von t'. Die Geschwindigkeit des Elektrons zur Zeit t' ist

(69b) $$\mathfrak{v} = -\frac{d\mathfrak{r}}{dt'},$$

deren Komponente parallel dem nach dem Aufpunkte hingezogenen Radiusvektor:

(69c) $$\mathfrak{v}_r = -\frac{dr}{dt'}.$$

Ferner ist die Beschleunigung, die das Elektron zur Zeit t' erfährt:

$$\dot{\mathfrak{v}} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt'}. \tag{69d}$$

Der zur Zeit t' von der Punktladung entsandte Beitrag trifft nun nach Durchlaufung des Latensweges r im Aufpunkte P ein, also zur Zeit

$$t = t' + \frac{r}{c}. \tag{70}$$

Ist anderseits der Aufpunkt P gegeben, und die Zeit t des Eintreffens der Störung in P, so ist, durch Gleichung (70), die Zeit t' des Entsendens in eindeutiger Weise bestimmt. Es ist diejenige Zeit, zu der die auf den Aufpunkt hin sich mit Lichtgeschwindigkeit kontrahierende Kugel die Punktladung trifft. Für den hier behandelten Fall der Unterlichtgeschwindigkeit ist Zeit und Ort des Treffens eindeutig bestimmt, wenn die Bewegung der Ladung gegeben ist.

Bei gegebenem Aufpunkt ordnet sich, gemäß (70), einer jeden Zeit t des Eintreffens eine Zeit t' des Entsendens zu. Dem Übergang zur Zeit $t + dt$ des Eintreffens entspricht, bei festgehaltenem Aufpunkt, ein Übergang zur Zeit $t' + dt'$ des Entsendens; dabei ist, nach (70),

$$1 = \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{dr}{dt'}\frac{\partial t'}{\partial t},$$

oder, nach (69c und a),

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}} = \frac{r}{s}. \tag{70a}$$

Diese Relation ist dem Sinne nach durchaus mit der Gleichung (64c) identisch. Sie unterscheidet sich von ihr nur der Form nach, indem wir dort totale, hier partielle Differentiationszeichen gebrauchen. Das geschieht darum, weil wir den Aufpunkt P nicht ein für allemal festhalten, sondern es uns vorbehalten, bei festgehaltener Zeit, den Aufpunkt P zu verrücken. Einer solchen Verrückung des Aufpunktes würde eine Änderung der Zeit t' des Entsendens entsprechen, die wir in kartesischer Schreibweise durch die partiellen Differential-

quotienten nach den Koordinaten des Aufpunktes auszudrücken hätten. In vektorieller Schreibweise wird die Veränderung von t' bei Verschiebung des Aufpunktes durch den Gradienten $\nabla t'$ sich ausdrücken. Nach (70) ist

$$0 = \nabla t' + \frac{1}{c} \nabla r.$$

Bei der Berechnung des Gradienten von r ist nun mit Vorsicht zu verfahren. Würde nur der Aufpunkt verschoben und der Ort der Punktladung festgehalten, so würde der Gradient des Abstandes r mit dem vom Elektron zum Aufpunkte hinweisenden Einheitsvektor $\mathfrak{r}_1$ identisch sein. Nun entspricht aber der abgeänderten Zeit t' des Entsendens eine Verrückung der Punktladung, die zu einer Abstandsänderung

$$\frac{dr}{dt'} \nabla t' = -\mathfrak{v}_r \nabla t'$$

Veranlassung gibt.

Es wird demnach

$$0 = \left(1 - \frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right) \nabla t' + \frac{1}{c} \mathfrak{r}_1.$$

Hieraus folgt, mit Rücksicht auf (70a)

$$\nabla t' = -\frac{\mathfrak{r}_1}{c} \frac{\partial t'}{\partial t}. \tag{70b}$$

Daneben ergibt sich

$$\nabla r = \mathfrak{r}_1 \frac{\partial t'}{\partial t}. \tag{70c}$$

Würde man anderseits, bei festgehaltenem Aufpunkte, r partiell nach der Zeit t differentiieren, so würde nur der Zuwachs des Abstandes infolge der Abänderung der Zeit t' des Entsendens und der hierdurch bedingten Verrückung der Punktladung in Frage kommen; es wird

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{dr}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\mathfrak{v}_r \frac{\partial t'}{\partial t}. \tag{70d}$$

Durch partielle Differentiation nach der Zeit und nach dem Orte des Aufpunktes sind aus den elektromagnetischen Potentialen (69) die Feldstärken, gemäß (28) und (29), ab-

zuleiten. Um diese Differentiationen durchführen zu können, müssen wir noch angeben, wie s und $\mathfrak{v}$ nach Zeit und Ort zu differentiieren sind. Was zunächst s anbelangt, so ist dasselbe, nach (69a), bei gegebenem Aufpunkte nur von t' abhängig. Man hat daher

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ds}{dt'}\,\frac{\partial t'}{\partial t},$$

und, nach (69a bis d):

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left\{-\mathfrak{v}_r - \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}) + \frac{\mathfrak{v}^2}{c}\right\}\frac{\partial t'}{\partial t}. \tag{71}$$

Der Gradient von s hingegen ist

$$\nabla s = \nabla r - \frac{1}{c}\nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{r}).$$

Wie bei der Berechnung des Gradienten von r, so ist auch bei der Berechnung des Gradienten des skalaren Produktes

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{r}) = x\mathfrak{v}_x + y\mathfrak{v}_y + z\mathfrak{v}_z$$

zu beachten, daß nicht nur der Aufpunkt verschoben wird, sondern daß dem verschobenen Aufpunkte sich, gemäß (70), ein anderer Ort der Punktladung zuordnet. Die x-Komponente des bei festgehaltener Punktladung genommenen Gradienten von $(\mathfrak{v}\mathfrak{r})$ ist

$$\frac{\partial(\mathfrak{v}\mathfrak{r})}{\partial x} = \mathfrak{v}_x.$$

Es ist demnach der erste Bestandteil des Gradienten gleich $\mathfrak{v}$. Der zweite, infolge der Verrückung der Punktladung hinzutretende Bestandteil ist

$$\frac{d(\mathfrak{v}\mathfrak{r})}{dt'}\nabla t' = \left\{(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}) - \mathfrak{v}^2\right\}\nabla t'.$$

Es wird demnach, gemäß (70b)

$$\nabla(\mathfrak{v}\mathfrak{r}) = \mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{r}_1}{c}\left\{(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}) - \mathfrak{v}^2\right\}\frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Mit Rücksicht auf (70c) folgt endlich als Gradient von s:

$$\nabla s = \mathfrak{r}_1\left\{1 + \frac{1}{c^2}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}) - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right\}\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\mathfrak{v}}{c}. \tag{71a}$$

Was die partiellen Differentialquotienten von $\mathfrak{v}$ nach t, x, y, z anbelangt, so gilt, da $\mathfrak{v}$ nur von t' abhängt, nach (69d)

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \dot{\mathfrak{v}} \frac{\partial t'}{\partial t}. \tag{71b}$$

In entsprechender Weise gilt z. B.

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} = \dot{\mathfrak{v}}_z \frac{\partial t'}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} = \dot{\mathfrak{v}}_y \frac{\partial t'}{\partial z}.$$

Daher ist die x-Komponente von curl $\mathfrak{v}$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} = [\nabla t', \dot{\mathfrak{v}}]_x.$$

Entsprechende Ausdrücke gelten für die übrigen Komponenten; wir fassen sie, Gleichung (70b) berücksichtigend, zu der Vektorgleichung zusammen:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v} = \frac{1}{c} [\dot{\mathfrak{v}} \mathfrak{r}_1] \frac{\partial t'}{\partial t}. \tag{71c}$$

Wir haben jetzt die Mittel gewonnen, um auf Grund der Formeln (28, 29):

$$\mathfrak{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$$

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$

aus (69) das elektromagnetische Feld abzuleiten. Wir erhalten

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{s^2} \nabla s - \frac{e}{s c^2} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{e \mathfrak{v}}{s^2 c^2} \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Nach (71a) ist hier zu setzen

$$\nabla s + \frac{\mathfrak{v}}{c^2} \frac{\partial s}{\partial t} = \mathfrak{r}_1 \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} (\dot{\mathfrak{v}} \mathfrak{r}) - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2} \right\} \frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\mathfrak{v}}{c} \left\{ 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t} \right\}.$$

Ferner folgt aus (71) und (70a)

$$1 - \frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t} = \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} (\dot{\mathfrak{v}} \mathfrak{r}) - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2} \right\} \frac{\partial t'}{\partial t},$$

mithin

$$\nabla s + \frac{\mathfrak{v}}{c^2} \frac{\partial s}{\partial t} = \left\{ \mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c} \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} (\dot{\mathfrak{v}} \mathfrak{r}) - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2} \right\} \frac{\partial t'}{\partial t}.$$

Mit Rücksicht auf (71b) und (70a) wird demnach der folgende Ausdruck des elektrischen Vektors erhalten:

(72) $$\mathfrak{E} = -\frac{e\dot{\mathfrak{v}}}{rc^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + \frac{e}{r^2}\left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right\}\left\{1 - \beta^2 + \frac{1}{c^2}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})\right\}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3;$$

dabei ist, abkürzungsweise,

(72a) $$\beta^2 = \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}$$

gesetzt worden.

Der magnetische Vektor hingegen wird, nach Regel ($\varkappa$) in I, S. 438

$$\mathfrak{H} = \frac{e}{c}\operatorname{curl}\left\{\frac{\mathfrak{v}}{s}\right\} = \frac{e}{sc}\operatorname{curl}\mathfrak{v} + \frac{e}{s^2c}[\mathfrak{v}, \nabla s].$$

Hierin sind die Ausdrücke (71c) und (71a) einzutragen, und es ist wieder, nach (70a), s durch r und $\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)$ auszudrücken. Dann folgt, als Ausdruck des magnetischen Vektors,

(73) $$\mathfrak{H} = \frac{e}{rc^2}[\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1]\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + \frac{e}{cr^2}[\mathfrak{v}\mathfrak{r}_1]\cdot\left\{1 - \beta^2 + \frac{1}{c^2}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})\right\}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3.$$

Die Formeln (72) und (73) stellen das elektromagnetische Feld einer beliebig bewegten Punktladung dar.[1]) Die elektrische Feldstärke setzt sich aus zwei Vektoren zusammen. Der erste Vektor ist der Beschleunigung der Punktladung zur Zeit t' entgegengerichtet. Der zweite Vektor ist parallel zu

(73a) $$\mathfrak{R} = r\left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right\} = \mathfrak{r} - \mathfrak{v}\frac{r}{c}.$$

Um diesen Vektor geometrisch zu interpretieren, gehen wir auf die Abbildung (2) des vorletzten Paragraphen zurück. Wir haben es hier allerdings nicht, wie dort, mit gleichförmiger, sondern mit ungleichförmiger Bewegung zu tun. Betrachten wir indessen, statt der wirklichen Bewegung, eine solche, die gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ erfolgt, welche die Punktladung gerade zur Zeit t' des Entsendens

1) Ich habe diese Formeln ohne Angabe des Beweises in den Vorlesungen vorgetragen, die ich im Wintersemester 1901/02 an der Universität Göttingen über die Theorie der elektromagnetischen Strahlung gehalten habe. Einen Beweis veröffentlichte K. Schwarzschild, Göttinger Nachrichten 1903, S. 132.

(im Punkte E') besaß, so wird sie während der Latenszeit $\frac{r}{c}$ die Strecke $E'E = \mathfrak{v} \cdot \frac{r}{c}$ beschreiben. $\mathfrak{R}$ wird dann der Vektor EP der Figur 2, der von dem gleichzeitigen Orte des Elektrons nach dem Aufpunkte hin gezogen ist. Diesem Radiusvektor parallel weist der zweite Bestandteil des elektrischen Vektors. Bei einer wirklich gleichförmigen Bewegung geht er in (67d) über.

Den magnetischen Vektor können wir in der Form schreiben:

$$\mathfrak{H} = [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{E}]; \tag{73b}$$

derselbe steht mithin senkrecht auf dem vom Orte des Entsendens E' nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor, und auf dem elektrischen Vektor.

Wir sind nunmehr in der Lage, den allgemeinen Ausdruck der elektromagnetischen Kraft anzugeben, welche die Punktladung e auf eine zweite, zur Zeit t den Aufpunkt P mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ passierende Punktladung e' ausübt. Diese Kraft ist, der Grundgleichung V gemäß,

$$e'\mathfrak{F} = e'\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}'\mathfrak{H}]\right\}.$$

Durch Einführung von (73b) erhalten wir

$$e'\mathfrak{F} = e'\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\Big[\mathfrak{v}'\,[\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}]\Big]\right\}$$

und erkennen, daß die Kraft in der Ebene der Vektoren $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{E}$ liegt. Nach Regel (δ) in Bd. I, S. 437 können wir auch schreiben

$$e'\mathfrak{F} = e'\left\{\mathfrak{E}\left(1 - \frac{\mathfrak{v}'_r}{c}\right) + \frac{\mathfrak{r}_1}{c}(\mathfrak{v}'\mathfrak{E})\right\}. \tag{73c}$$

Wir können diese Kraft mit K. Schwarzschild[1]) als „elementare elektrodynamische Kraft" bezeichnen. Dieselbe hängt ab von Geschwindigkeit und Beschleunigung der Ladung e zur Zeit des Entsendens, und von der Geschwindigkeit der

---

1) K. Schwarzschild, Gött. Nachr. 1903, S. 132.

Ladung e', auf welche die Kraft wirkt, zur Zeit des Eintreffens der Erregung.

In der Fernwirkungstheorie der Elektrodynamik stellte man ein Elementargesetz für die Wechselwirkung zweier elektrischer Ladungen an die Spitze und suchte auf dieses die ganze Theorie zu begründen. Wir haben, den Vorstellungen der Maxwellschen Theorie gemäß, die einfache und exakte Grundlage der Elektrodynamik in den Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes gesehen. Als entfernte Folgerung jener Grundgleichungen hat sich nunmehr ein Elementargesetz für die Wechselwirkung zweier Elektronen ergeben; dasselbe ist indessen weder einfach, noch in Strenge gültig. Wissen wir doch, daß das wirkende Elektron nur dann als Punktladung betrachtet werden darf, wenn die Bedingungen (63a) und (63b) erfüllt sind. Nur in dem durch diese Bedingungen eingeschränkten Gültigkeitsbereiche wird man mit dem Elementargesetze (73c) operieren dürfen. Innerhalb dieses Bereiches kann man, wenn die Bewegung des ersten Elektrons vorgegeben ist, aus Gleichung (70) für jeden Ort des zweiten Elektrons die zugehörige Zeit t' des Entsendens, und aus (73c) die zur Zeit t auf das zweite Elektron ausgeübte Kraft ermitteln. Um aber die Rückwirkung auf das erste Elektron berechnen zu können, muß man die Beschleunigung kennen, welche diese Kraft dem zweiten Elektron erteilt; hierfür reichen jedoch die bisherigen Entwickelungen keineswegs aus. Vielmehr werden wir zur Berechnung der Bewegung eines Elektrons bei gegebener Kraft erst im nächsten Kapitel die Hilfsmittel gewinnen. Dort werden wir auf die Grundgleichungen I bis V zurückgehen, und in einfachen Fällen näherungsweise gültige Lösungen derselben ermitteln. Solange uns die Lösung des „Einelektronproblemes“ noch unbekannt ist, kann uns das Gesetz der elementaren elektrodynamischen Kraft nur von geringem Nutzen sein. Es bestimmt zwar die Kraft, aber nicht die Bewegung, welche sich die beiden Elektronen gegenseitig mitteilen; es führt nicht einmal zur Aufstellung der Differentialgleichungen des „Zweielektronenproblemes“.

Wir kehren zurück zu den Formeln für das elektromagnetische Feld. Nach (73b) ist

$$[\mathfrak{H}\mathfrak{r}_1] = -\left[\mathfrak{r}_1\,[\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}]\right] = \mathfrak{E} - \mathfrak{r}_1\,(\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}).$$

Da nun, nach (72), sich ergibt

$$(\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}) = -\frac{e(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})}{r^2c^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + \frac{e}{r^2}\left(1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)\left\{1-\beta^2+\frac{(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})}{c^2}\right\}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3,$$

so folgt, mit Rücksicht auf (70a):

$$(\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}) = \frac{e}{r^2}(1-\beta^2)\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2,$$

und somit

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{H}\mathfrak{r}_1] + \frac{\mathfrak{r}_1 e}{r^2}(1-\beta^2)\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2, \tag{73d}$$

eine Formel, die der Formel (73b) als Gegenstück gegenübertritt.

In der Wellenzone, wo die Feldstärken umgekehrt proportional der Entfernung r abnehmen, vereinfachen sich die Ausdrücke (72, 73) der Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$. Es wird

$$\mathfrak{E} = -\frac{e\dot{\mathfrak{v}}}{rc^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + \frac{e}{rc^2}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1)\left\{\mathfrak{r}_1-\frac{\mathfrak{v}}{c}\right\}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3.$$

Berücksichtigen wir, daß nach (70a)

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}} = \frac{1}{1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{r}_1)}{c}},$$

und daß daher

$$\left(\mathfrak{r}_1,\,\mathfrak{r}_1-\frac{\mathfrak{v}}{c}\right) = 1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{r}_1)}{c} = 1:\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

ist, so erhalten wir

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{rc^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3\left\{\left\{\mathfrak{r}_1-\frac{\mathfrak{v}}{c}\right\}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1) - \dot{\mathfrak{v}}\left(\mathfrak{r}_1,\,\mathfrak{r}_1-\frac{\mathfrak{v}}{c}\right)\right\},$$

oder, nach Regel δ in Bd. I, S. 437

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{rc^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3\left[\mathfrak{r}_1\left[\mathfrak{r}_1-\frac{\mathfrak{v}}{c},\,\dot{\mathfrak{v}}\right]\right]. \tag{74}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{r}_1-\frac{\mathfrak{v}}{c} = \frac{\mathfrak{R}}{r}, \tag{74a}$$

wo $\mathfrak{R}$ den durch (73a) definierten und oben geometrisch gedeuteten Vektor vorstellt. In der Wellenzone steht, nach

(74), der elektrische Vektor senkrecht auf dem Radiusvektor $\mathfrak{r}$, der von dem Orte des Entsendens aus konstruiert ist. Er liegt in der Ebene der Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$. Die Formel (73d) geht in der Wellenzone über in

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{H}\mathfrak{r}_1]; \tag{74b}$$

da anderseits allgemein (73b) gilt, so folgt: in der Wellenzone stellen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{r}_1$ ein System dreier wechselseitig aufeinander senkrechter Richtungen dar; der elektrische Vektor ist dem Betrage nach dem magnetischen gleich. Der Strahlvektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \frac{c}{4\pi}\Big[\mathfrak{E}\,[\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{E}]\Big] = \mathfrak{r}_1\frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}^2 \tag{74c}$$

weist parallel dem von der Punktladung aus gezogenen Radiusvektor.

Es liegen demnach hier durchaus dieselben Verhältnisse vor, wie in der Wellenzone eines ruhenden Dipoles (vgl. § 9). Die jetzt erhaltenen Formeln müssen natürlich, wenn man zu langsamer Bewegung des Elektrons übergeht, in die damals aufgestellten Formeln (54) übergehen. Das trifft in der Tat zu; denn nehmen wir $|\mathfrak{v}|$ klein gegen c an, und setzen demgemäß $\frac{\partial t'}{\partial t} = 1$, so ergibt (74) denselben Ausdruck von $\mathfrak{E}$, welcher dort aus (54) und (54a) folgte. Die nunmehr gewonnenen allgemeinen Formeln für die Feldstärken der entsandten Wellen unterliegen nicht den Einschränkungen, unter denen wir dort das Problem der Lichtstrahlung behandelten. Die hier abgeleiteten Relationen bestimmen die Wellenstrahlung, die von einem beschleunigten Elektron ausgesandt wird, auch dann, wenn die Geschwindigkeit des Elektrons von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit wird. Nur die Überlichtgeschwindigkeit, die unmittelbare Nachbarschaft der Lichtgeschwindigkeit, sowie der Fall einer außerordentlich raschen, stoßartigen Geschwindigkeitsänderung sind durch die Bedingung (63b), die allen unseren Entwickelungen zugrunde liegt, ausgeschlossen. In den beiden nächsten Paragraphen werden wir weitere Folge-

rungen aus unseren Resultaten ableiten. Wir werden die gesamte Energie und Bewegungsgröße berechnen, die von einer rasch bewegten Punktladung ausgestrahlt wird, und werden alsdann die Rückwirkung der Strahlung auf die bewegte Ladung, in allgemeinerer Weise als im § 9, bestimmen.

§ 14. Theorie des bewegten leuchtenden Punktes.

Die Kenntnis der Energie und der Bewegungsgröße, die ein beliebig rasch bewegtes Elektron bei einer Geschwindigkeitsänderung ausstrahlt, ist, entsprechend der Mannigfaltigkeit der von der Elektronentheorie umfaßten Vorgänge, in mehrfacher Hinsicht von Wichtigkeit. Erstens kann man auf Grund dieser Kenntnis sich ein Urteil darüber bilden, inwieweit es gestattet ist, bei einer ungleichförmigen Elektronenbewegung die Energie und die Bewegungsgröße als vom bewegten Elektron mitgeführt anzusehen. Bei einer stationären geradlinigen Bewegung ist das stets gestattet; diese stellt eine reine Konvektionsstrahlung dar. Die ungleichförmige Bewegung ist keine reine Konvektionsstrahlung, ein Teil der Energie und Bewegungsgröße wird dabei in Wellenstrahlung verwandelt. Bei wenig beschleunigten „quasistationären“ Bewegungen kommt jedoch die ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße gegenüber der mitgeführten kaum in Betracht, sie kann bei manchen Aufgaben, z. B. bei der Ermittelung der Beschleunigung und Ablenkung der Elektronen durch äußere Felder, ganz vernachlässigt werden. Wann diese Vernachlässigung gestattet ist, und wann nicht, das kann man dann beurteilen, wenn man die ausgestrahlten Anteile der Energie und der Bewegungsgröße kennt.

Treffen die im Kathodenstrahle bewegten Elektronen auf die Antikathode, so werden sie vermutlich, in das Innere eindringend, von den Molekülen der wägbaren Materie wiederholt aus ihrer Bahn abgelenkt. Hier wird die entsandte Wellenstrahlung von Bedeutung; nach der Stokes-Wiechertschen Hypothese ist sie mit der von der Antikathode ausgehenden Röntgenstrahlung identisch (vgl. § 3). Die Beziehung zur

Theorie der Röntgenstrahlen verleiht den Entwickelungen dieses Paragraphen ebenfalls ein gewisses Interesse.

Drittens aber ist die Kenntnis der allgemeinen Gesetze der Wellenstrahlung einer beschleunigten Punktladung für die Optik bewegter Körper von Bedeutung. Wir haben in § 9 ein elektromagnetisches Modell des ruhenden lichtentsendenden Moleküles kennen gelernt; wir nahmen an, daß es aus einem ruhenden positiven und einem schwingenden negativen Elektron besteht, und zeigten (§ 10), daß die normale Form des Zeeman-Effektes durch dieses denkbar einfachste elektromagnetische Modell erklärt wird. Hat man es nun mit einem bewegten Molekül zu tun, so wird man in konsequenter Verfolgung jener Vorstellung ein positives und ein negatives Elektron sich denken müssen; die Bewegung des positiven ist durch die Bewegung des Moleküles bestimmt, während das negative Elektron um das bewegte positive schwingt. Ein solcher bewegter und gleichzeitig schwingender elektrischer Dipol stellt das einfachste Modell des bewegten leuchtenden Punktes dar. Vorzugsweise mit Rücksicht auf das Problem des bewegten leuchtenden Punktes werden wir in diesem Paragraphen unsere Ansätze verfolgen.

Bevor wir dazu übergehen, wollen wir unsere Theorie zu einigen allgemeineren Prinzipien in Beziehung setzen, die für die Optik bewegter Körper von fundamentaler Wichtigkeit sind. Wir denken uns wieder den ruhenden Aufpunkt P und den bewegten Dipol, der jetzt mit dem bewegten leuchtenden Punkte identifiziert wird; wir verstehen unter t' die Zeit, zu der das Licht von dem bewegten Punkte ausgesandt wird, unter t die Zeit, zu der es den ruhenden Punkt P erreicht. Diese beiden Zeitpunkte sind durch die Relation (64a) verknüpft; aus ihr leiteten wir die Beziehung (64c) ab; wir wollen dieselbe schreiben

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{1-\beta\cos\varphi}, \tag{75}$$

indem wir mit β das Verhältnis der Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}|$ des leuchtenden Punktes zur Lichtgeschwindigkeit bezeichnen, und

mit φ den Winkel, den zur Zeit (t') des Entsendens der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ mit dem nach dem Aufpunkte hin gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ einschloß. Das in dem Zeitelemente dt' von dem bewegten leuchtenden Punkte entsandte Licht passiert den ruhenden Punkt P in dem durch (75) bestimmten Zeitelement dt.

Die Gleichung (75) stellt die allgemeine Fassung des sogenannten „Dopplerschen Prinzipes" für eine bewegte Lichtquelle dar. Wir gelangen zu der gewöhnlichen Fassung dieses Prinzipes, indem wir die Gleichung auf den Fall periodischer Schwingungen des lichtentsendenden Dipols anwenden; wir bezeichnen mit τ', ν' Schwingungsdauer und Frequenz der Schwingungen des Dipols, mit τ, ν hingegen diejenige Schwingungsdauer und Frequenz, welche der ruhende Beobachter in P wahrnimmt. Erfolgt die translatorische Bewegung des leuchtenden Punktes während einer Schwingung merklich gleichförmig und geradlinig, so gilt die Beziehung (75), welche die Zeitelemente des Entsendens mit denen des Auffangens verknüpft, auch für die gesamte Dauer der in der Lichtquelle bzw. in dem ruhenden Aufpunkte P stattfindenden Schwingungen; es wird

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{\nu}{\nu'} = \frac{1}{1 - \beta \cos \varphi}, \tag{75a}$$

und das ist eben die gewöhnliche Fassung des Dopplerschen Prinzipes: Die Schwingungsdauer τ der wahrgenommenen Schwingungen wird verkleinert, wenn der leuchtende Punkt dem Beobachter sich nähert (φ ein spitzer Winkel), sie wird vergrößert, wenn der leuchtende Punkt sich vom Beobachter entfernt (φ ein stumpfer Winkel). Bei Annäherung der bewegten Lichtquelle werden demnach alle Spektrallinien nach der violetten, bei Entfernung nach der roten Seite des Spektrums verschoben.

Das gilt, wenn der Beobachter ruht. Bewegt er sich dagegen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}^*$, so braucht die Welle, die in der Zeit dt den ruhenden Punkt P passiert, die Zeit

(75b) $$dt^* = \frac{c\,dt}{c - \mathfrak{v}_r^*} = \frac{dt}{1 - \beta^* \cos\varphi^*}$$

$$\left\{\beta^* = \frac{|\mathfrak{v}^*|}{c}, \quad \varphi^* = \sphericalangle\, \mathfrak{r}, \mathfrak{v}^*\right\},$$

um über den bewegten Punkt hinwegzustreichen. Es gilt folglich

(75c) $$\frac{dt^*}{dt'} = \frac{1 - \beta\cos\varphi}{1 - \beta^*\cos\varphi^*}.$$

Dieses ist die allgemeinste Fassung des Dopplerschen Prinzipes. Sie fußt im Grunde nur auf der Relation (64a); diese aber sagt nichts anderes aus, als daß die Lichtfortpflanzung im Raume nach allen Seiten hin mit der gleichen Geschwindigkeit (c) erfolgt und daß das Licht seine Geschwindigkeit weder infolge der Bewegung der Lichtquelle, noch infolge der Bewegung des Beobachters ändert. Nur diese Grundvoraussetzung der elektromagnetischen Lichttheorie kommt bei der Ableitung des Dopplerschen Prinzipes ins Spiel. Es sind demnach nur die Feldgleichungen für den Äther, nicht die sonstigen Voraussetzungen der Elektronentheorie, die dem Dopplerschen Prinzipe zugrunde liegen.

Für periodische Lichtschwingungen bestimmen sich die Schwingungsdauer τ^* und die Frequenz ν^*, welche der bewegte Beobachter wahrnimmt, folgendermaßen:

(75d) $$\frac{\tau^*}{\tau'} = \frac{\nu'}{\nu^*} = \frac{1 - \beta\cos\varphi}{1 - \beta^*\cos\varphi^*}.$$

Bewegen sich Lichtquelle und Beobachter einander parallel mit einer nach Richtung und Betrag konstanten Geschwindigkeit, so ist

$$\beta^* = \beta, \quad \varphi^* = \varphi;$$

es folgt demnach aus (75c, d)

(75e) $$\frac{dt^*}{dt'} = 1, \quad \tau^* = \tau', \quad \nu^* = \nu'.$$

Bei gemeinsamer Translationsbewegung der Lichtquelle und des Beobachters fällt die Dopplersche Korrektion fort. Der bewegte Punkt P wird in der gleichen

Zeit dt' von der Welle überstrichen, in der die Welle von der bewegten Lichtquelle entsandt wurde; eine Farbenänderung infolge der Bewegung findet nicht statt. Wie wir wissen (I, S. 433), befindet sich die Erde in einer „absoluten" Bewegung; irdische Lichtquellen und irdische Beobachter führen im Raume eine gemeinsame Translationsbewegung aus. Der obige Satz lehrt nun, daß die Periode des wahrgenommenen Lichtes mit der Periode der in der irdischen Lichtquelle stattfindenden Schwingungen identisch ist.

Die zur Zeit t' vom leuchtenden Punkte ausgehende Störung wird, zur Zeit t, eine Kugelfläche vom Radius $r = c(t - t')$ einnehmen. Wir wählen die Zeit t so groß, daß die Kugel sich bereits bis zur Wellenzone ausgedehnt hat. Hier sind die Feldstärken diejenigen, die wir am Schlusse des vorigen Paragraphen kennen lernten. Da die Beträge der Feldstärken einander gleich sind, so ist die elektrische Energiedichte der magnetischen gleich; die gesamte Energiedichte ist

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\right\} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}^2.$$

Wir bezeichnen mit $d\omega$ den körperlichen Winkel, unter dem ein Flächenelement der Kugel vom Mittelpunkte aus gesehen wird. Die Breite der in der Zeit dt' entsandten Welle beträgt $c\,dt$, da die mit Lichtgeschwindigkeit forteilende Welle in der Zeit dt über den ruhenden Aufpunkt forteilt; dabei ist dt durch dt' gemäß dem Dopplerschen Prinzip zu bestimmen (Gleichung 75). Die Energie der im Zeitelemente dt' entsandten Welle beträgt demnach

$$\frac{r^2 c}{4\pi}\int d\omega\,\mathfrak{E}^2\,dt = dt'\,\frac{r^2 c}{4\pi}\int d\omega\,\mathfrak{E}^2\,\frac{dt}{dt'}.$$

Dieselbe ist zwischen zwei exzentrischen Kugelflächen enthalten; die Kugelflächen expandieren sich mit Lichtgeschwindigkeit; dabei nimmt $\mathfrak{E}^2$ umgekehrt proportional zu r^2 ab, so daß die gesamte Energie des Wellenimpulses bei der Ausbreitung im Raume sich nicht ändert. Diese Energie ist in der Zeit dt' von der bewegten Lichtquelle in den Raum ent-

sandt worden. Die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie beträgt

(76) $$-\frac{dW}{dt'} = \frac{r^2 c}{4\pi}\int d\omega\, \mathfrak{E}^2 \frac{dt}{dt'}.$$

Wir können die Strahlung des leuchtenden Punktes auch auf einem anderen Wege berechnen, nämlich auf Grund des Poyntingschen Satzes. Der Poyntingsche Vektor weist, nach Gleichung (74c), parallel dem Kugelradius, es wird mithin seine in Richtung des Radius genommene Komponente mit seinem Betrage identisch:

(76a) $$\mathfrak{S}_r = S = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}^2.$$

Der Poyntingsche Satz bestimmt nun (vgl. § 4) den Energiestrom, der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer ruhenden Fläche hindurchtritt. Dieser „absolute Energiestrom" ist gleich der Normalkomponente des Vektors $\mathfrak{S}$. Um mit Hilfe des Poyntingschen Satzes die ausgestrahlte Energie zu bestimmen, müssen wir den leuchtenden Punkt durch eine ruhende Fläche einschließen; wir wählen zweckmäßigerweise eine Kugel, welche zur Zeit t gerade mit der zur Zeit t' entsandten Kugel koinzidiert. Dabei dürfen wir aber nicht übersehen, daß die Zeit, während deren die in der Zeit dt' von dem bewegten leuchtenden Punkte entsandte Welle durch die Kugel tritt, nicht an allen Punkten der Kugel die gleiche ist. Sie bestimmt sich, gemäß dem Dopplerschen Prinzip, für die verschiedenen Punkte der Kugel in verschiedener Weise; es ist eben die Zeit, die wir oben (in Gleichung 75) mit dt bezeichneten. Will man mit Hilfe des Poyntingschen Satzes die Energie bestimmen, die von einem bewegten leuchtenden Punkte entsandt wird, so hat man die Zeit, während deren die Welle durch die Elemente der ruhenden Fläche tritt, dem Dopplerschen Prinzipe gemäß zu berechnen. Die in der Zeit dt' entsandte Strahlung wird dann, nach (76a),

$$r^2\int d\omega\, S\, dt = dt'\frac{r^2 c}{4\pi}\int d\omega\, \mathfrak{E}^2 \frac{dt}{dt'}.$$

Man sieht sofort, daß für die sekundliche Strahlung der bewegten Lichtquelle ein Ausdruck folgt, der mit (76) genau übereinstimmt.

Man kann nun aber auch statt der ruhenden Fläche eine dem leuchtenden Punkte parallel mitbewegte Fläche zugrunde legen. Für eine solche fällt, wie wir oben zeigten, die Dopplersche Korrektion fort. Die in der Zeit dt' entsandte Welle tritt in dem gleichen Zeitintervall dt' durch die gleichförmig mitbewegte Fläche. Auf eine bewegte Fläche ist aber der Poyntingsche Satz nicht ohne weiteres anzuwenden. Es ist vielmehr zu berücksichtigen, daß zu dem absoluten elektromagnetischen Energiestrom, der nach der Poyntingschen Theorie im Raume stattfindet, derjenige Energiestrom tritt, der allein eine Folge der Bewegung der Fläche ist. Der letztere beträgt pro Flächeneinheit

$$\mathfrak{v}_\nu \frac{1}{8\pi}\left\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\right\},$$

wenn $\mathfrak{v}_\nu$ die parallel der äußeren Normalen genommene Komponente der Geschwindigkeit der bewegten Fläche ist; denn die Energie, die infolge der Bewegung der Fläche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit tritt, ist gleich $\mathfrak{v}_\nu$, multipliziert mit der Energiedichte; sie tritt bei der Bewegung von außen nach innen; $\mathfrak{S}_\nu$, die Normalkomponente des Poyntingschen Vektors, gibt dagegen den durch die Veränderung des Feldes allein bedingten, von innen nach außen tretenden Energiestrom an. Die Differenz

$$\mathfrak{S}_\nu - \frac{\mathfrak{v}_\nu}{8\pi}\left\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\right\} \tag{76b}$$

stellt den Energiestrom durch die bewegte Fläche, oder, wie wir sagen wollen, den „relativen Energiestrom“ dar.

Die Anwendung auf unsere, den gleichförmig bewegten leuchtenden Punkt einschließende mitbewegte Kugel ergibt, da die Geschwindigkeit der Kugel mit ihrer Normalen den Winkel φ einschließt, und da in der Wellenzone $\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{H}^2$ ist, gemäß (76a)

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}^2(c-|\mathfrak{v}|\cos\varphi)=\frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}^2(1-\beta\cos\varphi)$$

als Wert des relativen Energiestromes. Die in der Zeiteinheit durch die ganze Kugel hindurchtretende Energie wird demnach

$$\frac{r^2c}{4\pi}\int d\omega\,\mathfrak{E}^2(1-\beta\cos\varphi);$$

dieser Ausdruck stimmt, nach (75), wiederum genau mit dem in (76) erhaltenen Werte für die in der Sekunde ausgestrahlte Energie überein.

Die sinngemäße Anwendung des Poyntingschen Satzes ergibt demnach in jedem Falle den richtigen Wert für die Strahlung, die von der bewegten Lichtquelle entsandt wird. Dabei kann man eine ruhende oder eine mitbewegte Fläche der Anwendung des Poyntingschen Satzes zugrunde legen. Im ersteren Falle ist die Dopplersche Korrektion zu berücksichtigen; im letzteren Falle fällt zwar die Dopplersche Korrektion fort, es ist jedoch der Poyntingsche Satz mit Rücksicht auf die Bewegung der Fläche zu korrigieren.

Das Dopplersche Prinzip und der Poyntingsche Satz sind die Grundpfeiler der Strahlungstheorie. Derjenige, der sich mit ihnen nicht gründlich vertraut gemacht hat, ist den Problemen der Optik bewegter Körper nicht gewachsen. Denn es wird ihm nicht gelingen, zwischen der Skylla des Dopplerschen Prinzipes und der Charybdis des Poyntingschen Satzes unversehrt hindurchzusteuern.

Neben der ausgesandten Energie ist für die Mechanik des bewegten leuchtenden Punktes die ausgesandte Bewegungsgröße von Wichtigkeit. Wie wir in § 5 allgemein gezeigt haben, ist die Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße dem durch c^2 dividierten Strahlvektor gleich. In der Wellenzone des leuchtenden Punktes ist mithin, nach (74c), die Dichte der Bewegungsgröße

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{r}_1\frac{1}{4\pi c}\mathfrak{E}^2$$

Dieser Vektor ist an Stelle der Energiedichte $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}^2$ in die Formel (76) einzusetzen, um die in der Zeiteinheit von dem bewegten leuchtenden Punkte entsandte Bewegungsgröße zu erhalten:

$$(77) \qquad -\frac{d\mathfrak{G}}{dt'} = \frac{r^2}{4\pi}\int d\omega\, \mathfrak{r}_1\, \mathfrak{E}^2 \frac{dt}{dt'}.$$

In (76) und (77) ist unter $\mathfrak{E}$ die Feldstärke der vom bewegten leuchtenden Punkte entsandten Wellen zu verstehen. Handelt es sich um eine gleichförmige geradlinige Bewegung des leuchtenden Punktes, so ist nach der Vorstellung, die wir uns von dem Vorgange in der Lichtquelle machten, das positive Elektron in gleichförmiger, geradliniger Bewegung begriffen, während das negative Elektron kleine Schwingungen um das positive ausführt. Wir wollen voraussetzen, daß die Geschwindigkeit der Schwingungsbewegung klein ist gegen diejenige der gemeinsamen Translation. Alsdann ist unter $\mathfrak{v}$ in (74) der konstante Geschwindigkeitsvektor der bewegten Lichtquelle zu verstehen. Der daselbst auftretende Vektor (vgl. 73a)

$$(77\text{a}) \qquad \mathfrak{R} = r\left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{r}\right\} = \mathfrak{r} - \mathfrak{v}\frac{r}{c}$$

gewinnt in diesem Falle eine vereinfachte Bedeutung. Es ist (vgl. Abb. 2 in § 12) der Radiusvektor, der nach dem Aufpunkte von dem gleichzeitigen Orte des Elektrons aus gezogen ist.

Das gleichförmig bewegte positive Elektron trägt nichts zur Strahlung bei; denn die Feldstärken des von ihm erregten Feldes nehmen mit dem Quadrate des Abstandes ab und verschwinden in der Wellenzone gegen diejenigen des schwingenden negativen Elektrons. Wir können mithin für $\mathfrak{E}$ den Ausdruck (74) einführen. Dabei ist $\frac{\partial t'}{\partial t}$ dasselbe (vgl. 70a), was wir jetzt als Dopplersche Korrektion bezeichnet und, auf einen festgehaltenen Aufpunkt uns beziehend, $\frac{dt'}{dt}$ geschrieben haben. Nach (75) wird daher

$$(77\text{b}) \qquad \mathfrak{E} = \frac{e}{rc^2(1-\beta\cos\varphi)^3}\left[\mathfrak{r}_1\left[\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}, \dot{\mathfrak{v}}\right]\right].$$

Unter $\mathfrak{v}$ ist dabei die konstante Geschwindigkeit des leuchtenden Punktes zu verstehen, unter $\dot{\mathfrak{v}}$ die Beschleunigung des schwingenden negativen Elektrons. Es ist zu betonen, daß die obigen Einschränkungen sich nur auf die Anwendung beziehen, die wir von unseren Formeln machen. Handelt es sich um die Energie und Bewegungsgröße, die von einem einzelnen beschleunigten Elektron ausgesandt werden, so sind unsere Formeln in dem Bereiche gültig, den wir bereits in § 11 umgrenzten; $\mathfrak{v}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$ stellen dann die Geschwindigkeit und die Beschleunigung dar, welche dem Elektron zur Zeit t' des Entsendens erteilt wurden. Nur die Anwendung auf die Theorie des bewegten schwingenden Dipols gründet sich auf die erwähnte vereinfachende Annahme, daß der periodische Teil von $\mathfrak{v}$ klein ist gegen den konstanten, die Translationsgeschwindigkeit des Dipols darstellenden Teil.

Nach Regel δ in Bd. I, S. 437 ist

$$\left[\mathfrak{r}_1\left[\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}, \dot{\mathfrak{v}}\right]\right] = \left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right\}(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{r}_1) - \dot{\mathfrak{v}}\,(1 - \beta\cos\varphi).$$

Berücksichtigt man nun, daß

$$\left(\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right)^2 = \frac{\mathfrak{R}^2}{r^2} = 1 + \beta^2 - 2\beta\cos\varphi, \tag{77c}$$

so erhält man

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{e^2}{r^2c^4(1-\beta\cos\varphi)^6}\Big\{\dot{\mathfrak{v}}^2(1-\beta\cos\varphi)^2 - (\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{r}_1)^2(1-\beta^2) + \frac{2}{c}(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{v})(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{r}_1)(1-\beta\cos\varphi)\Big\}, \tag{77d}$$

wobei übrigens, nach (74c), durch $\mathfrak{E}^2$ zugleich der Strahlvektor bestimmt ist:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{r}_1 \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}^2. \tag{77e}$$

Wir ziehen zunächst zwei spezielle Fälle in Betracht, nämlich erstens den Fall, daß die Schwingungen des negativen Elektrons parallel, und zweitens den, daß sie senkrecht zur Bewegungsrichtung der Lichtquelle erfolgen.

I. Longitudinal schwingender Dipol.

Hier gilt

$$(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1)^2 = \dot{\mathfrak{v}}^2\cos^2\varphi,$$

$$\frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{v})(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1) = \dot{\mathfrak{v}}^2\beta\cos\varphi.$$

Es wird daher aus (77d) nach einigen Umformungen

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2\sin^2\varphi}{r^2c^4(1-\beta\cos\varphi)^6}. \tag{78}$$

Die Einführung in (76) und (77) ergibt, bei Berücksichtigung von (75),

$$-\frac{dW_1}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{4\pi c^3}\int\frac{d\omega\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5} \tag{78a}$$

für die ausgestrahlte Energie, und

$$-\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{4\pi c^4}\int\frac{d\omega\,\mathfrak{r}_1\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5} \tag{78b}$$

für die ausgestrahlte Bewegungsgröße.

II. Transversal schwingender Dipol.

Hier gilt

$$(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}) = 0 \quad \text{und} \quad (\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r}_1)^2 = \dot{\mathfrak{v}}^2\sin^2\varphi\cos^2\zeta,$$

wenn ζ den Winkel der Ebenen der Vektoren $(\mathfrak{v}, \dot{\mathfrak{v}})$ und $(\mathfrak{v}, \mathfrak{r}_1)$ anzeigt, φ, ζ demnach Polarkoordinaten der Einheitskugel sind. Es wird

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{r^2c^4(1-\beta\cos\varphi)^6}\left\{(1-\beta\cos\varphi)^2-(1-\beta^2)\sin^2\varphi\cos^2\zeta\right\}. \tag{79}$$

Die Einführung in (76) und (77) ergibt

$$-\frac{dW_2}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{4\pi c^3}\int d\omega\left\{\frac{1}{(1-\beta\cos\varphi)^3} - (1-\beta^2)\cos^2\zeta\frac{\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5}\right\}, \tag{79a}$$

$$-\frac{d\mathfrak{G}_2}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{4\pi c^4}\int d\omega\,\mathfrak{r}_1\left\{\frac{1}{(1-\beta\cos\varphi)^3} - (1-\beta^2)\cos^2\zeta\frac{\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^5}\right\} \tag{79b}$$

für die bei transversalen Schwingungen stattfindende Strahlung von Energie und von Bewegungsgröße.

Was die ausgestrahlte Bewegungsgröße anbelangt, so erkennt man ohne weiteres, daß nur die der Bewegungsrichtung parallele Komponente von Null verschieden sein kann. In der Tat, betrachten wir zwei Punkte der Einheitskugel, die sich in bezug auf die Bewegungsrichtung spiegelbildlich entsprechen, d. h. dasselbe φ und ein um 180^0 verschiedenes ζ besitzen, so sind die den beiden Punkten zugehörigen Einheitsvektoren $\mathfrak{r}_1$ in (78b) mit demselben Ausdruck multipliziert, und ebenso in (79b). Es zerstören sich also die Beiträge der betreffenden Elemente der Einheitskugel hinsichtlich der zu $\mathfrak{v}$ senkrechten Komponenten, und es bleibt nur die zu $\mathfrak{v}$ parallele Komponente übrig. Führen wir die neue Integrationsvariable

$$u = -\cos\varphi$$

ein, wodurch

$$d\omega = du\, d\zeta$$

wird, so ergibt die Integration nach ζ:

$$(79\text{c}) \qquad -\frac{dW_1}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{2c^3}\int_{-1}^{+1}\frac{du\,(1-u^2)}{(1+\beta u)^5},$$

$$(79\text{d}) \qquad -\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt'} = \mathfrak{v}\frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{2c^5\beta}\int_{-1}^{+1}\frac{du(-u)\,(1-u^2)}{(1+\beta u)^5},$$

$$(79\text{e}) \qquad -\frac{dW_2}{dt'} = \frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{2c^3}\left\{\int_{-1}^{+1}\frac{du}{(1+\beta u)^3} - \frac{1-\beta^2}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{du\,(1-u^2)}{(1+\beta u)^5}\right\},$$

$$(79\text{f}) \qquad -\frac{d\mathfrak{G}_2}{dt'} = \mathfrak{v}\frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{2c^5\beta}\left\{\int_{-1}^{+1}\frac{du\,(-u)}{(1+\beta u)^3} - \frac{1-\beta^2}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{du\,(-u)\,(1-u^2)}{(1+\beta u)^5}\right\}.$$

Zur Auswertung der Integrale schreitend, setzen wir abkürzungsweise

$$(80) \qquad \varkappa^2 = 1-\beta^2.$$

Es gilt

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^2} = \frac{2}{\varkappa^2},$$

daher

$$\text{(80a)} \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{du\,(-u)}{(1+\beta u)^3} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^2} = \frac{2\beta}{\varkappa^4}.$$

Ferner findet man leicht

$$\text{(80b)} \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^3} = \frac{2}{\varkappa^4},$$

und folglich

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du\,u^2}{(1+\beta u)^5} = \frac{1}{3\cdot 4}\frac{d^2}{d\beta^2}\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^3} = \frac{2(1+5\beta^2)}{3\varkappa^8};$$

da außerdem

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^5} = \frac{2\,(1+\beta^2)}{\varkappa^8}$$

ist, so wird schließlich

$$\text{(80c)} \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{du\,(1-u^2)}{(1+\beta u)^5} = \frac{4}{3\varkappa^6}.$$

Anderseits ergibt sich aus (80a):

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du\,u^2}{(1+\beta u)^4} = \frac{1}{3}\frac{d}{d\beta}\int_{-1}^{+1} \frac{du\,(-u)}{(1+\beta u)^3} = \frac{2\,(1+3\beta^2)}{3\varkappa^6},$$

und mit Rücksicht auf die leicht abzuleitende Beziehung:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1+\beta u)^4} = \frac{2\,(3+\beta^2)}{3\varkappa^6},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du\,(1-u^2)}{(1+\beta u)^4} = \frac{4}{3\varkappa^4},$$

woraus endlich folgt:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{du\,(-u)\,(1-u^2)}{(1+\beta u)^5} = \frac{1}{4}\frac{d}{d\beta}\int_{-1}^{+1} \frac{du\,(1-u^2)}{(1+\beta u)^4} = \frac{4\beta}{3\varkappa^6}. \tag{80d}$$

Nach (79c, d) und (80c, d) wird die von longitudinalen Schwingungen des Dipoles ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße:

$$-\frac{dW_1}{dt'} = \frac{2e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{3c^3\varkappa^6}, \tag{81}$$

$$-\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt'} = \mathfrak{v}\frac{2e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{3c^5\varkappa^6}. \tag{81a}$$

Aus (79e, f) hingegen, in Verbindung mit (80a bis d), folgt die von transversalen Schwingungen des Dipoles ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße:

$$-\frac{dW_2}{dt'} = \frac{2}{3}\frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^3\varkappa^4}, \tag{81b}$$

$$-\frac{d\mathfrak{G}_2}{dt'} = \mathfrak{v}\frac{2}{3}\frac{e^2\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^5\varkappa^4}. \tag{81c}$$

Es ergibt sich also, bemerkenswerterweise, die Strahlung bei transversalen Schwingungen im Verhältnis $\varkappa^2 = 1-\beta^2$ kleiner, als bei longitudinalen Schwingungen. Bei langsamer Bewegung, wenn β^2 gegen 1 zu vernachlässigen ist, kommt natürlich dieser Unterschied nicht in Betracht. Alsdann gehen die Formeln (81) und (81b) in die Hertzsche Formel (55) für die Strahlung eines ruhenden Dipoles über.

Die Formeln (81a, c) zeigen an, daß der bewegte leuchtende Punkt fortgesetzt elektromagnetische Bewegungsgröße in den Raum hinaussendet, und zwar überwiegt die der Bewegungsrichtung parallele Komponente. Da nun die Summe der im ganzen Raume enthaltenen Bewegungsgröße, elektromagnetische

und mechanische zusammen, den Ergebnissen des § 5 zufolge konstant sein muß, falls eine äußere Kraft an der Lichtquelle nicht angreift, so nimmt die Bewegungsgröße der Lichtquelle selbst pro Sekunde um den entsprechenden Betrag ab, d. h. es übt die ausgesandte Strahlung eine Reaktionskraft auf den leuchtenden Punkt aus, welche der Bewegung entgegenwirkt. Dieselbe beträgt:

(81d) $$\mathfrak{K}_1^s = -\mathfrak{v}\frac{2}{3}\frac{e^2\overline{\dot{\mathfrak{v}}^2}}{c^5\varkappa^6} \text{ für longitudinale Schwingungen,}$$

(81e) $$\mathfrak{K}_2^s = -\mathfrak{v}\frac{2}{3}\frac{e^2\overline{\dot{\mathfrak{v}}^2}}{c^5\varkappa^4} \text{ für transversale Schwingungen.}$$

Dabei sind natürlich Mittelwerte über eine Schwingung zu nehmen. Um die Geschwindigkeit konstant zu halten, muß jene Kraft durch eine andere, äußere Kraft äquilibriert werden.

Wir gehen jetzt zu dem allgemeinen Falle über, wo das negative Elektron in der Lichtquelle ganz beliebige Schwingungen ausführt, so daß $\dot{\mathfrak{v}}$ mit $\mathfrak{v}$ einen ganz beliebigen, und auch im Verlaufe der Schwingungen periodisch wechselnden Winkel einschließt. Wir können dann setzen

$$\dot{\mathfrak{v}} = \dot{\mathfrak{v}}_1 + \dot{\mathfrak{v}}_2,$$

wo $\dot{\mathfrak{v}}_1$ zu $\mathfrak{v}$ parallel, $\dot{\mathfrak{v}}_2$ zu $\mathfrak{v}$ senkrecht ist. Führt man dieses in (77d) ein, so treten erstens Glieder auf, die zu $\dot{\mathfrak{v}}_1^2$ bzw. zu $\dot{\mathfrak{v}}_2^2$ proportional sind; diese führen zu den soeben berechneten Werten der von der longitudinalen Komponente bzw. von der transversalen Komponente ausgesandten Strahlung. Zweitens aber treten noch Glieder auf, die dem Produkte $|\dot{\mathfrak{v}}_1|\cdot|\dot{\mathfrak{v}}_2|$ proportional sind, nämlich

$$-2(\dot{\mathfrak{v}}_1\mathfrak{r}_1)(\dot{\mathfrak{v}}_2\mathfrak{r}_1)(1-\beta^2) = -2\cos\varphi\sin\varphi\cos\zeta\,|\dot{\mathfrak{v}}_1|\cdot|\dot{\mathfrak{v}}_2|\,(1-\beta^2),$$

und

$$\frac{2}{c}(\dot{\mathfrak{v}}_1\mathfrak{v})(\dot{\mathfrak{v}}_2\mathfrak{r}_1)(1-\beta\cos\varphi) = 2\beta\sin\varphi\cos\zeta\,(1-\beta\cos\varphi)\,|\dot{\mathfrak{v}}_1|\cdot|\dot{\mathfrak{v}}_2|$$

{ζ ist der Winkel, den die Ebenen der Vektoren $(\dot{\mathfrak{v}}, \mathfrak{v})$ und $(\mathfrak{r}, \mathfrak{v})$ einschließen, so daß φ, ζ Polarkoordinaten der Einheitskugel sind}.

Diese beiden Glieder ergeben zu $\mathfrak{E}^2$ den Beitrag

$$\frac{|\dot{\mathfrak{v}}_1| \cdot |\dot{\mathfrak{v}}_2| \cdot e^2 \sin\varphi \cos\zeta}{r^2 c^4 (1-\beta\cos\varphi)^6} (\beta - \cos\varphi).$$

Die entsprechenden Anteile der Ausdrücke (76) und (77), d. h. der Strahlung von Energie und Bewegungsgröße, sind

$$\frac{2e^2 |\dot{\mathfrak{v}}_1| \cdot |\dot{\mathfrak{v}}_2|}{4\pi c^3} \int \frac{d\omega \sin\varphi \cos\zeta}{(1-\beta\cos\varphi)^5} (\beta - \cos\varphi)$$

und

$$\frac{2e^2 |\dot{\mathfrak{v}}_1| \cdot |\dot{\mathfrak{v}}_2|}{4\pi c^4} \int \frac{d\omega\, \mathfrak{r}_1 \sin\varphi \cos\zeta}{(1-\beta\cos\varphi)^5} (\beta - \cos\varphi).$$

Setzt man hier wieder $u = -\cos\varphi$, $d\omega = du\, d\zeta$, so verschwindet der erste Ausdruck ohne weiteres bei der Integration nach ζ.

Die Komponenten des im zweiten Gliede angegebenen Vektors sind gesondert zu behandeln. Es sind die Komponenten von $\mathfrak{r}_1$:

parallel zu $\mathfrak{v}$ gleich $\cos\varphi$,
parallel zu $\dot{\mathfrak{v}}_2$ gleich $\sin\varphi \cos\zeta$,
senkrecht zu $\mathfrak{v}$ und $\dot{\mathfrak{v}}_2$ gleich $\sin\varphi \cdot \sin\zeta$.

Die erste und dritte Komponente der ausgestrahlten Bewegungsgröße verschwindet ohne weiteres, wie die Integration nach ζ ergibt. Die zweite Komponente wird nach Ausführung dieser Integration zunächst:

$$\frac{e^2 |\dot{\mathfrak{v}}_1| \cdot |\dot{\mathfrak{v}}_2|}{2c^4} \int_{-1}^{+1} \frac{du(1-u^2)}{(1+\beta u)^5} \cdot (\beta + u).$$

Gemäß (80c, d) hat auch dieses Integral den Wert Null. Wir haben also bewiesen: Es superponieren sich die Energie- und Impulsstrahlungen der longitudinalen und der transversalen Schwingungskomponenten des bewegten Dipoles, was die Gesamtstrahlung anbelangt. Ist η der Winkel der Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$, so wird, nach (81) und (81b), die pro Sekunde ausgestrahlte Energie:

$$(82) \qquad -\frac{dW}{dt'} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathfrak{v}}^2\left\{\frac{\cos^2\eta}{\varkappa^6} + \frac{\sin^2\eta}{\varkappa^4}\right\},$$

wofür man, mit Rücksicht auf die Bedeutung (80) von $\varkappa^2$, auch schreiben kann:

$$(82a) \quad -\frac{dW}{dt'} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^6}\left\{1 - \beta^2\sin^2\eta\right\} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3\varkappa^6}\left\{\dot{\mathfrak{v}}^2 - \frac{1}{c^2}[\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}]^2\right\},$$

oder auch

$$(82b) \quad -\frac{dW}{dt'} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathfrak{v}}^2\left\{\frac{1}{\varkappa^4} + \frac{\beta^2\cos^2\eta}{\varkappa^6}\right\} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\}.$$

Ebenso kann nach (81a, c) für die ausgestrahlte Bewegungsgröße geschrieben werden:

$$(83) \qquad -\frac{d\mathfrak{G}}{dt'} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\mathfrak{v}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\}.$$

Bezüglich ihrer mechanischen Rückwirkung auf die bewegte Lichtquelle kann die Strahlung durch die Kraft ersetzt werden

$$(83a) \qquad \mathfrak{K}^s = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\mathfrak{v}\left\{\overline{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4}} + \overline{\frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}}\right\},$$

welche im Mittel dieselbe Abnahme der Bewegungsgröße der Lichtquelle bedingt. Dieser Kraft muß durch eine in die Bewegungsrichtung der Lichtquelle fallende äußere Kraft $-\mathfrak{K}^s$ das Gleichgewicht gehalten werden, wenn anders die Geschwindigkeit konstant bleiben soll. Die Arbeit der äußeren Kraft wird in elektromagnetische Energie der entsandten Wellenstrahlung verwandelt; sie beträgt pro Sekunde

$$(83b) \qquad -(\mathfrak{v}\mathfrak{K}^s) = +\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\beta^2\left\{\overline{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4}} + \overline{\frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}}\right\}.$$

Dieser Anteil der ausgestrahlten Energie entstammt also nicht der thermischen und chemischen Energie der Lichtquelle, sondern eben der mechanischen Arbeit der Kraft $-\mathfrak{K}^s$, welche der Rückwirkung der Strahlung das Gleichgewicht hält. Der Rest der pro Sekunde in Wellenstrahlung verwandelten Energie:

$$(83c) \qquad -\frac{dW}{dt'} + (\mathfrak{v}, \mathfrak{K}^s) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\overline{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^2}} + \overline{\frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^4}}\right\}$$

muß durch den Wärmeinhalt oder die chemische Energie der Lichtquelle gedeckt werden.

Die Formel (82) bestimmt die Energie der von einem beschleunigten Elektron ausgesandten Wellenstrahlung in allen den Fällen, in welchen dasselbe als Punktladung betrachtet werden darf. Ich habe dieselbe zuerst in einer Vorlesung im Wintersemester 1901/02 vorgetragen. Im Druck veröffentlicht wurde sie, und ebenso die Formel (83), in meiner Arbeit über die Prinzipien der Dynamik des Elektrons[1]), und unabhängig davon, von O. Heaviside, in der Nature.[2]) Später habe ich die Bedeutung dieser Entwickelungen für die Theorie des leuchtenden Punktes erörtert, und den Beweis der Formeln, im wesentlichen in der hier wiedergegebenen Fassung, geführt.[3]) An dem letztgenannten Orte habe ich auch den allgemeinen Ausdruck für die Rückwirkung der Strahlung auf den bewegten schwingenden Dipol abgeleitet. Setzt man die Gesamtstrahlung der Lichtquelle gleich E, so folgt aus (82b) und (83a)

$$(83d) \qquad \mathfrak{K}^s = -\frac{\mathfrak{v}}{c^2}\cdot E.$$

Dieser Ausdruck für die Reaktionskraft wurde unabhängig von H. A. Lorentz[4]) angegeben; es bezieht sich die Lorentzsche Ableitung auf einen allgemeineren Fall, insofern als über die Vorgänge in der Lichtquelle keine besondere Annahme gemacht wird, und doch wieder auf einen spezielleren Fall, da die Geschwindigkeit der Lichtquelle als klein gegen die Lichtgeschwindigkeit betrachtet wird. Wenngleich die Reaktionskraft der Strahlung meist außerordentlich gering ist, so ist

---

1) M. Abraham. Ann. d. Phys. 10 S. 105, 1903. (Eingesandt am 23. Oktober 1902.)

2) O. Heaviside. Nature 67, p. 6. Vom 6. November 1902.

3) M. Abraham. Ann. d. Phys. 14, S. 273—287, 1904.

4) H. A. Lorentz. Enzykl. der mathem. Wissensch. Bd. V, Art. 14 S. 270.

ihre Existenz doch von prinzipieller Bedeutung. Diese Kraft, welche der schwingende Dipol auf sich selbst ausübt, ist ein typisches Beispiel für den Gegensatz zum dritten Axiome der Newtonschen Mechanik, auf den wir in § 5 hinwiesen, und der so eng mit den Grundannahmen der Elektronentheorie verknüpft ist.

Nach der in § 3 erwähnten Hypothese sind die Röntgenstrahlen nichts anderes, als die Wellenstrahlung, welche beim Auftreffen der Kathodenstrahlen auf die Antikathode entsteht. Ist das Elektron bei seiner Hemmung oder Reflexion an der Antikathode immerhin so wenig beschleunigt, daß die Bedingung (63b) erfüllt ist, so kann die Energie der entsandten Röntgenstrahlen aus unserer Formel (82) berechnet werden. Über den Betrag der Beschleunigung geben die in § 3 erwähnten Beugungsversuche von Haga und Wind Auskunft, welche eine Breite des Wellenimpulses von 10^{-8} cm ergeben haben.[1]) Hiernach würde der Bereich, in welchem das Elektron eine Geschwindigkeitsänderung erfährt, von der Größenordnung des Radius der molekularen Wirkungssphäre sein. Nehmen wir nun an, das Elektron habe die Geschwindigkeit $|\mathfrak{v}| = \frac{1}{3} c$, und es werde auf einem Wege von 10^{-8} cm, d. h. in der Zeit $\frac{1}{c} \cdot 10^{-8}$ Sekunde, seine Bewegungsrichtung umgekehrt, so ist die mittlere Beschleunigung gleich $\frac{2}{3} c^2 \cdot 10^8$. Der Nenner in (63b) ist $c\,(c - |\mathfrak{v}|) = \frac{2}{3} c^2$, und a, der Radius des Elektrons, wird sich unten von der Größenordnung 10^{-13} ergeben. Der Bruch, der klein gegen 1 sein soll, ist hiernach auf $2 \cdot 10^{-5}$ zu schätzen. Hieraus folgt, daß bei der Emission von Röntgenstrahlen der Impulsbreite 10^{-8} cm das Elektron noch als Punktladung betrachtet werden darf, und daß (82) die Energie

1) H. Haga u. C. H. Wind. Akad. v. Wetenschapen te Amsterdam 7, 1899, S. 387 u. 500 u. 11, 1902, S. 350. Ann. d. Phys. 68, S. 884, 1899. — Vergleiche auch die von A. Sommerfeld auf Grund einer strengeren Theorie der Beugung von Wellenimpulsen gegebene Bestimmung der Impulsbreite. Phys. Zeitschr. 1, S. 105; 2, S. 55, 1900. Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 46, S. 11, 1901.

der vom einzelnen Elektron entsandten Röntgenstrahlung bestimmt, wofern die Röntgenstrahlen wirklich nichts anderes sind, als elektromagnetische Wellen.

Leider läßt die allzu geringe Kenntnis der Röntgenstrahlen eine weitere Verfolgung unserer Ansätze nicht zu. Würden uns experimentelle Bestimmungen der Energie der Röntgenstrahlen zur Verfügung stehen, die von Kathodenstrahlen bekannter Geschwindigkeit und Energie erzeugt werden, so könnten wir daran denken, die Zahl der Zusammenstöße der Elektronen mit den Molekülen der Antikathode auf Grund der obigen Formeln abzuschätzen, und unsere Vorstellungen über die Kräfte, welche von der wägbaren Materie auf die Elektronen ausgeübt werden, an der Hand derartiger Abschätzungen zu prüfen. Bei dem gegenwärtigen Stande der Forschung indessen müssen wir uns mit den obigen Andeutungen begnügen.

Es ist auch nicht ausgeschlossen, daß Fälle vorkommen, wo das Elektron, entsprechend einer Annahme von J. J. Thomson[1]), plötzlich gehemmt wird. Alsdann ist die Impulsbreite von der Ordnung des Elektronendurchmessers, also kleiner als 10^{-12} cm. Die dabei entsandte Wellenstrahlung ist natürlich einer Beugung nicht fähig. Wir kommen auf die Theorie dieses Falles, die aus dem Rahmen der auf der Annahme einer Punktladung beruhenden Entwickelungen dieses Kapitels herausfällt, weiter unten zurück (vgl. § 25).

Bei den γ-Strahlen des Radiums, deren Eigenschaften diejenigen besonders stark durchdringender Röntgenstrahlen sind, ist die Impulsbreite wohl geringer als 10^{-8} cm; die Geschwindigkeitsänderungen der Elektronen, denen die γ-Strahlen ihren Ursprung verdanken, erfolgen dann noch plötzlicher, als diejenigen, die bei der Emission der Röntgenstrahlen stattfinden.

§ 15. Die Rückwirkung der Strahlung auf ein bewegtes Elektron.

Wir stellen uns in diesem Paragraphen die Aufgabe, die Rückwirkung, welche die entsandte Wellenstrahlung auf das

1) J. J. Thomson. Phil. Mag. 45, S. 172, 1898.

entsendende Elektron ausübt, in allgemeiner Weise zu ermitteln. Wir betrachten dabei eine Bewegung des Elektrons, deren Geschwindigkeit bis zur Zeit t_1' gleichförmig und geradlinig war, sodann im Zeitintervalle von t_1' bis t_2' nach Betrag und Richtung in beliebiger, aber stets in den Gültigkeitsbereich der Bedingung (63b) fallender Weise abgeändert wurde, und sodann, von t_2' an, wieder gleichförmig und geradlinig ist. In dem Zeitintervalle $t_1' < t' < t_2'$ wird das Elektron eine gewisse Energie und Bewegungsgröße in den Raum hinausgesandt haben. Die entsandte Energie ist, nach (82b)

$$W_{12} = -\int_1^2 \frac{dW}{dt'} dt' = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_1^2 dt' \left\{ \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6} \right\},$$

in die entsandte Bewegungsgröße nach (83)

$$\mathfrak{G}_{12} = -\int_1^2 \frac{d\mathfrak{G}}{dt'} dt' = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\int_1^2 dt' \mathfrak{v} \left\{ \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6} \right\}.$$

Dies ist die zeitliche Abnahme der Energie und Bewegungsgröße, welche das Elektron selbst, bzw. das von ihm mitgeführte elektromagnetische Feld, infolge der Strahlung, erfahren hat; die verlorene Energie und Bewegungsgröße findet sich in den entsandten Wellen wieder.

Will man nun die Rückwirkung der Strahlung auf das Elektron durch eine Kraft $\mathfrak{K}^s$ zum Ausdruck bringen, so muß man diese Kraft so bestimmen, daß

$$(84) \qquad \begin{cases} \int_1^2 \mathfrak{K}^s \, dt' = -\mathfrak{G}_{12} \quad \text{und} \\ \int_1^2 (\mathfrak{v}\mathfrak{K}^s) \, dt' = -W_{12} \end{cases}$$

ist, d. h. daß ihr Zeitintegral der ausgestrahlten Bewegungsgröße, ihr Wegintegral der ausgestrahlten Energie entgegengesetzt gleich ist. Die Reaktionskraft der Strahlung hat demnach die Gleichungen zu erfüllen

$$(84\text{a})\qquad \int_1^2 \mathfrak{K}^s\,dt' = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\int_1^2 dt'\,\mathfrak{v}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4}+\frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\},$$

$$(84\text{b})\qquad \int_1^2 (\mathfrak{v}\,\mathfrak{K}^s)\,dt' = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_1^2 dt'\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4}+\frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\}.$$

Das muß selbstverständlich auch dann gelten, wenn irgendwelche äußeren Kräfte die Bewegung des Elektrons beeinflussen; auch dann muß der Impuls der Kraft $\mathfrak{K}^s$ der gesamten Bewegungsgröße, die Arbeit dieser Kraft der gesamten Energie der entsandten Wellen entgegengesetzt gleich sein. Es wird dann die Änderung der Bewegungsgröße und Energie des Elektrons durch die Reaktionskraft der Strahlung, im Verein mit den sonst noch vorhandenen Kräften, bestimmt. In welcher Weise, das wird das nächste Kapitel lehren (vgl. § 23).

Es kann auf den ersten Blick zweifelhaft erscheinen, ob es überhaupt möglich ist, beiden Gleichungen (84a, b) durch einen und denselben Ausdruck der Reaktionskraft $\mathfrak{K}^s$ zu genügen. Um diesen Zweifel zu beseitigen, geben wir sofort einen Ausdruck an, von dem wir zeigen, daß er, unter den zugrunde gelegten Annahmen, den Gleichungen (84a, b) Genüge leistet. Wir setzen

$$(85)\qquad \mathfrak{K}^s = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\frac{\ddot{\mathfrak{v}}}{\varkappa^2}+\frac{1}{c^2\varkappa^4}\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})+\frac{3\dot{\mathfrak{v}}}{c^2\varkappa^4}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})+\frac{3\mathfrak{v}}{c^4\varkappa^6}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2\right\}.$$

Berücksichtigen wir, daß, nach (80), gilt

$$(85\text{a})\qquad \frac{d\varkappa^2}{dt'} = \frac{d(1-\beta^2)}{dt'} = -\frac{2}{c^2}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}),$$

so ergibt die partielle Integration der beiden ersten Glieder:

$$\int_1^2 dt'\,\frac{\ddot{\mathfrak{v}}}{\varkappa^2} = \left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}}{\varkappa^2}\right\}_1^2 - \int_1^2 dt'\,\frac{2\dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4},$$

$$\int_1^2 \frac{dt'\,\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4} = \left\{\frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4}\right\}_1^2 - \int_1^2 dt'\left\{\frac{\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^2\varkappa^4}+\frac{\dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4}+\frac{4\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^4\varkappa^6}\right\}.$$

Berücksichtigen wir, daß, bis zur Zeit t_1', und von der Zeit t_2' an, der Beschleunigungsvektor $\dot{\mathfrak{v}}$ gleich Null sein soll, so erhalten wir

$$(85\text{b}) \quad \int_1^2 dt' \left\{ \frac{\ddot{\mathfrak{v}}}{\varkappa^2} + \frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4} \right\} = -\int_1^2 dt' \left\{ \frac{\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^2\varkappa^4} + \frac{3\dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4} + \frac{4\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^4\varkappa^6} \right\}.$$

Integriert man nun den Ausdruck (85) von $\mathfrak{K}^s$ nach der Zeit, wie es (84a) verlangt, und formt die ersten beiden Glieder in dieser Weise um, so ergibt die Vereinigung mit den letzten beiden Gliedern nichts anderes, als die rechte Seite von (84a). Es ist also diese Gleichung in der Tat erfüllt.

Für die sekundliche Arbeit der Kraft $\mathfrak{K}^s$ folgt aus (85)

$$(85\text{c}) \qquad (\mathfrak{v}\mathfrak{K}^s) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{ \frac{(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{\varkappa^4} + \frac{3(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6} \right\}.$$

Da nun die partielle Integration liefert

$$\int_1^2 dt' \frac{(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{\varkappa^4} = \left\{ \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{\varkappa^4} \right\}_1^2 - \int_1^2 dt' \left\{ \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{4(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6} \right\},$$

und da $\dot{\mathfrak{v}}$ an den Grenzen des Integrationsintervalles verschwindet, so ergibt das Zeitintegral der Arbeit in der Tat den in (84b) rechts stehenden Ausdruck. Die in (85) angegebene Kraft $\mathfrak{K}^s$ erfüllt alle Bedingungen, welche der Reaktionskraft der Strahlung vorgeschrieben sind.

Es fragt sich indessen, ob durch die angegebenen Bedingungen (84a, b) die Reaktionskraft der Strahlung überhaupt eindeutig bestimmt ist. Das ist sie in der Tat. Um dies einzusehen, muß man sich die physikalische Bedeutung dieser Kraft klar machen. Es ist eine Kraft, welche das vom bewegten Elektron erregte elektromagnetische Feld auf das Elektron selbst ausübt. Diese Kraft ist durch die Grundgleichung (V) bestimmt, wobei die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sich aus den Beiträgen zusammensetzen, welche die Volumelemente des Elektrons vorher ausgesandt haben. Diese Beiträge werden

von der mit Lichtgeschwindigkeit sich kontrahierenden Kugel dem Aufpunkte zugeführt. Bewegt sich nun das Elektron mit einer Geschwindigkeit, die kleiner ist, als die Lichtgeschwindigkeit c, so kommen, welches auch die Form des Elektrons sei, nur Beiträge in Betracht, welche in einem endlichen Zeitintervalle ausgesandt worden sind und welche durch die Geschwindigkeit und Beschleunigung bestimmt sind, die in diesem Zeitintervalle geherrscht hat. Ist die Bewegung überhaupt stetig, so muß diese Kraft sich durch die jeweils herrschende Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und deren Ableitungen nach der Zeit $\dot{\mathfrak{v}}$, $\ddot{\mathfrak{v}}$, $\dddot{\mathfrak{v}}$ usf. ausdrücken lassen. Da es sich hier nur um Bewegungen handeln kann, welche der Bedingung (63b) genügen, so sind die Voraussetzungen der Stetigkeit und Unterlichtgeschwindigkeit stets erfüllt. Da die gesuchte Kraft ferner bei gleichförmiger Bewegung verschwindet, so ist der allgemeinste Ansatz für die vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft folgender: Ein Aggregat von polaren Vektoren, deren jeder eine ganze rationale Vektorfunktion von $\mathfrak{v}$, $\dot{\mathfrak{v}}$, $\ddot{\mathfrak{v}}$, $\dddot{\mathfrak{v}}$ usf. ist, wobei jeder Vektor noch mit einem von $\beta = \frac{|\mathfrak{v}|}{c}$ abhängigen Skalar multipliziert sein kann.

Die Reaktionskraft der Strahlung insbesondere, welche den oben entwickelten Bedingungen zu genügen hat, ist dadurch noch weiter in ihrer Form beschränkt, daß sie bei den betrachteten, der Bedingung (63b) gehorchenden Bewegungen von der Form des Elektrons unabhängig ist. Wurde doch bei der Berechnung der ausgestrahlten Energie und Bewegungsgröße das Elektron als Punktladung betrachtet; in Ausdruck der gesuchten Kraft können daher irgendwelche von den Abmessungen des Elektrons abhängige Größen nicht eingehen, sondern ausschließlich die Vektoren $\mathfrak{v}$, $\dot{\mathfrak{v}}$, $\ddot{\mathfrak{v}}$ usf., ferner c und die Ladung e des Elektrons; und zwar muß die gesuchte Kraft, als Rückwirkung der Punktladung auf sich selbst, zu e^2 proportional sein. Nehmen wir nun $\frac{e^2}{c^3}$ als Faktor vorweg, so muß der gesuchte Ausdruck die Dimension einer Kraft dividiert durch die Dimension von $\frac{e^2}{c^3}$, besitzen. Entnimmt man

der Dimensionstabelle in Bd. I, S. 252 die Dimension von e^2, so findet man als Dimension des gesuchten Ausdruckes

$$[LT^{-3}].$$

Wir haben also Ausdrücke dieser Dimension zu suchen, welche ganze rationale Funktionen von $\mathfrak{v}$, $\dot{\mathfrak{v}}$, $\ddot{\mathfrak{v}}$ usf. sind, wobei eventuell noch die Lichtgeschwindigkeit c eingehen kann.

Nennen wir nun ν_1, ν_2, ν_3 die ganzen, aber nicht negativen Zahlen, welche die eingehende Potenz von $\mathfrak{v}$, $\dot{\mathfrak{v}}$, $\ddot{\mathfrak{v}}$ usf. anzeigen, und ν_0 die (positive oder negative) Zahl, welche die eingehende Potenz von c angibt, so soll die eingehende Potenz der Längendimension sein

$$\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \cdots = 1,$$

dagegen die eingehende Zeitdimension

$$-\nu_0 - \nu_1 - 2\nu_2 - 3\nu_3 + \cdots = -3.$$

Hieraus folgt

$$\nu_2 + 2\nu_3 + 3\nu_4 + \cdots = 2. \tag{86}$$

Da negative Werte von ν_2, ν_3, ν_4 ausgeschlossen sind, so ist

$$\nu_4 = \nu_5 = \cdots = 0.$$

Es können $\dddot{\mathfrak{v}}$ und noch höhere Ableitungen der Geschwindigkeit nicht auftreten. Die höchste eingehende Ableitung ist $\ddot{\mathfrak{v}}$, und zwar folgt aus (86), daß, wenn $\ddot{\mathfrak{v}}$ überhaupt eingeht,

$$\nu_3 = 1, \quad \nu_2 = 0 \tag{I}$$

die einzigen möglichen Potenzen von $\ddot{\mathfrak{v}}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$ sind; in diesem Falle ergeben die Ausgangsgleichungen

$$\nu_0 + \nu_1 = 0,$$

d. h. es tritt c so oft in den Nenner, wie $\mathfrak{v}$ im Zähler steht.

Neben diesem Lösungssystem läßt nun (86) noch ein von $\ddot{\mathfrak{v}}$ freies zu:

$$\nu_3 = 0, \quad \nu_2 = 2, \quad \nu_0 + \nu_1 = -1. \tag{II}$$

Hier geht $\dot{\mathfrak{v}}$ quadratisch ein, und c steht einmal öfter im Nenner, als $\mathfrak{v}$ im Zähler.

Jeder Lösung dieser Dimensionsgleichungen kann selbstverständlich eine beliebige Funktion der dimensionslosen Größe β als Faktor zugesellt werden.

Es fragt sich nun, welche ganze rationale Funktionen der Vektoren $\mathfrak{v}$, $\dot{\mathfrak{v}}$, $\ddot{\mathfrak{v}}$ unter das Schema (I) bzw. (II) fallen. Um die hier möglichen Verbindungen dieser Vektoren zu neuen polaren Vektoren in allgemeinster Weise zu ermitteln, gehen wir aus von einem Satze von H. Burkhardt.[1]) Diesem Satze zufolge wird die allgemeinste ganze rationale Vektorfunktion erhalten, indem man die ursprünglichen Vektoren zu Vektorprodukten vereinigt und indem man die ursprünglichen und die so gebildeten Vektoren mit den skalaren Produkten aus je zweien der ursprünglichen Vektoren multipliziert. Nun müssen wir die Vektorprodukte von je zweien der Vektoren $\mathfrak{v}$, $\dot{\mathfrak{v}}$, $\ddot{\mathfrak{v}}$ von vornherein ausschließen, da diese Vektorprodukte axiale Vektoren sind (vgl. I, S. 23). Es bleiben also nur die ursprünglichen drei Vektoren übrig, die mit den inneren Produkten aus je zweien und selbstverständlich mit irgendeiner Funktion der dimensionslosen Größe β multipliziert sein können.

Wir haben als Lösungen, die unter das Schema (I) fallen:

$$\text{(86a)} \qquad \ddot{\mathfrak{v}} \cdot f_1(\beta) \quad \text{und} \quad \mathfrak{v} \cdot \frac{(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{c^2} \cdot f_2(\beta),$$

während in das Schema (II) folgende Vektoren sich einordnen:

$$\text{(86b)} \qquad \dot{\mathfrak{v}} \cdot \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2} \cdot f_3(\beta), \quad \mathfrak{v} \cdot \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^2} \cdot f_4(\beta), \quad \mathfrak{v} \cdot \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^4} \cdot f_5(\beta).$$

Andere Ausdrücke der richtigen Dimension, welche polare Vektoren darstellen, gibt es nach dem Satze von Burkhardt überhaupt nicht. Der allgemeinste Ausdruck von $\mathfrak{K}^s$ muß sich also aus solchen Gliedern, multipliziert mit $\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}$, zusammensetzen lassen. Der Ausdruck (85) stellt sich in der Tat in dieser Form dar.

Es handelt sich nunmehr um den Nachweis, daß der allgemeinste Ausdruck von $\mathfrak{K}^s$, d. h. das allgemeinste Aggregat von

---

1) H. Burkhardt, Math. Ann. 43 (1893), S. 197. Vgl. auch Enzykl. d. math. Wissensch. Bd. IV. Art. 14. Nr. 11.

fünf Gliedern der Form (86a, b) $\left(\text{jedes multipliziert mit } \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\right)$, sich auf (85) reduziert, wenn gefordert wird, daß sein Zeitintegral für eine beliebige Bewegung mit der rechten Seite von (84a), sein Wegintegral mit der rechten Seite von (84b) identisch ist. Das wird bewiesen sein, wenn wir gezeigt haben, daß jedes Aggregat der Form

$$(87)\quad \mathfrak{E} = \ddot{\mathfrak{v}}\, f_1(\beta) + \mathfrak{v} \cdot \frac{(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{c^2} f_2(\beta) + \dot{\mathfrak{v}} \cdot \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2} f_3(\beta) + \mathfrak{v} \cdot \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^2} f_4(\beta) + \mathfrak{v} \cdot \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^4} f_5(\beta)$$

identisch verschwindet, wenn für eine beliebige, im Zeitintervall $t_1' < t' < t_2'$ beschleunigte Bewegung das Zeitintegral und das Wegintegral von $\mathfrak{E}$ verschwinden. Wir schreiten jetzt zum Beweise dieses Satzes. Wir formen die beiden ersten Glieder von $\mathfrak{E}$ durch partielle Integration um, wobei wir beachten, daß $\dot{\mathfrak{v}}$ an den Integrationsgrenzen verschwindet und daß

$$\frac{d}{dt'} f(\beta) = f'(\beta)\frac{d\beta}{dt'} = \frac{f'(\beta)}{c}\frac{d|\mathfrak{v}|}{dt'} = \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2}\frac{1}{\beta} f'(\beta).$$

Wir erhalten

$$\int_1^2 dt'\, \ddot{\mathfrak{v}}\, f_1(\beta) = -\int_1^2 dt'\, \frac{\dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2}\frac{1}{\beta} f_1'(\beta),$$

$$\int_1^2 dt'\, \frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{c^2} f_2(\beta) = -\int_1^2 dt' \left\{ \frac{\dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2} f_2(\beta) + \frac{\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^2} f_2(\beta) + \frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^4\beta} f_2'(\beta)\right\}.$$

Demgemäß wird das Zeitintegral des Vektors $\mathfrak{E}$:

$$(87\text{a})\quad \int_1^2 dt'\, \mathfrak{E} = \int_1^2 dt'\, \frac{\dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2}\left\{ f_3(\beta) - f_2(\beta) - \frac{1}{\beta} f_1'(\beta)\right\} + \int_1^2 dt'\, \frac{\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}^2}{c^2}\left\{ f_4(\beta) - f_2(\beta)\right\} + \int_1^2 dt'\, \frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^4}\left\{ f_5(\beta) - \frac{1}{\beta} f_2'(\beta)\right\}.$$

Dieses Zeitintegral soll nun verschwinden, welches auch immer die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Elektrons in dem betrachteten Zeitintervalle sein mag.

Wir betrachten zuerst eine nur transversal beschleunigte Bewegung, die mit konstanter Geschwindigkeit vor sich geht. Hier ist $(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}) = 0$, es verschwindet das erste und dritte der Integrale. Das zweite hingegen ist von Null verschieden, es sei denn, daß

$$f_4(\beta) - f_2(\beta) = 0 \tag{87b}$$

ist. Wäre diese Größe von Null verschieden, so könnte man die Bewegung im Zeitintervalle von t_1' bis t_2' so wählen, daß das zweite Integral einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Man könnte z. B. das Elektron einen Kreisbogen von einem Winkel kleiner als 2π beschreiben lassen, wobei das Integral einen nicht verschwindenden Vektor bestimmen würde. Es muß mithin (87b) für beliebige Werte von β erfüllt sein.

Wir betrachten zweitens eine nur longitudinal beschleunigte Bewegung, deren Geschwindigkeit also in dem Zeitintervalle von t_1' bis t_2' dauernd wächst. Hier sind $\dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})$ und $\frac{\mathfrak{v}}{c^2}\left(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}\right)^2$ beides der Bewegungsrichtung parallele Vektoren vom Betrage

$$|\mathfrak{v}|\,\dot{\mathfrak{v}}^2 \quad \text{bzw.} \quad \beta^2\,|\mathfrak{v}|\,\dot{\mathfrak{v}}^2.$$

Da nun (87b) allgemein gilt, so kann das Zeitintegral von $\mathfrak{C}$ für eine solche Bewegung nur dann allgemein verschwinden, wenn

$$\left\{f_3(\beta) - f_2(\beta) - \frac{1}{\beta}f_1'(\beta)\right\} + \beta^2\left\{f_5(\beta) - \frac{1}{\beta}f_2'(\beta)\right\} = 0 \tag{87c}$$

für jeden Wert von β erfüllt ist.

Bei der zuletzt betrachteten Bewegung war $\dot{\mathfrak{v}}$ parallel zu $\mathfrak{v}$; wir können nun diese Bewegung etwas abändern, indem wir eine transversale Beschleunigung hinzufügen. Dann besitzt im ersten Integral in (87a) der Integrand eine Komponente senkrecht zur Bewegungsrichtung, die nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn weist. Ist die Änderung der Bewegungsrichtung nur gering, so können sich die Beiträge der einzelnen

Elemente der Bahn nicht zerstören, sie können sich auch nicht gegen die Bestandteile des dritten Integrales aufheben, da letztere parallel der Bewegungsrichtung weisen. Wir erhalten also als Bedingung dafür, daß die zu $\mathfrak{v}$ senkrechte Komponente des Zeitintegrales von $\mathfrak{E}$ für eine solche Bewegung stets verschwindet:

$$f_3(\beta) - f_2(\beta) - \frac{1}{\beta} f_1'(\beta) = 0, \tag{87d}$$

was weiter im Verein mit (87c) ergibt:

$$f_5(\beta) - \frac{1}{\beta} f_2'(\beta) = 0. \tag{87e}$$

Nun sollte aber nicht nur das Zeitintegral, sondern auch das Wegintegral von $\mathfrak{E}$:

$$\int_1^2 \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s} = \int_1^2 dt' (\mathfrak{E}\mathfrak{v}),$$

allgemein verschwinden. Formt man die beiden ersten Glieder dieses Integrales durch partielle Integration um und berücksichtigt das Bestehen der Gleichungen (87b, c), so erhält man

$$\int_1^2 dt' (\mathfrak{E}\mathfrak{v}) = -\int_1^2 dt' \left\{ \dot{\mathfrak{v}}^2 f_1(\beta) + \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2} f_2(\beta) \right\}. \tag{87f}$$

Für eine nur transversal beschleunigte Bewegung ist das Integral nur dann stets gleich Null, wenn allgemein

$$f_1(\beta) = 0 \tag{87g}$$

erfüllt ist; für eine longitudinal beschleunigte Bewegung tritt die Bedingung

$$f_2(\beta) = 0 \tag{87h}$$

hinzu. Aus (87b, d, e) folgt nunmehr

$$f_3(\beta) = f_4(\beta) = f_5(\beta) = 0. \tag{87i}$$

Wir haben also bewiesen: Der allgemeinste zulässige Ausdruck für die Reaktionskraft der Strahlung verschwindet identisch, wenn sowohl sein Zeitintegral,

wie sein Wegintegral für eine beliebige, in einem gewissen Zeitintervalle beschleunigte Bewegung gleich Null sind. Es ist also nicht möglich, den Ausdruck (85) der Reaktionskraft so abzuändern, daß die Gleichungen (84a, b) für eine jede Bewegung erfüllt bleiben. Der gefundene Ausdruck (85) für die Rückwirkung der Strahlung auf die bewegte Punktladung ist demnach der einzige, welcher den oben angegebenen Voraussetzungen entspricht.[1])

Wir betrachten einige spezielle Fälle.

a) Gleichförmige Bewegung längs eines Kreises.

Es ist $(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}) = 0$; der Beschleunigungsvektor hat den Betrag

$$|\dot{\mathfrak{v}}| = |\mathfrak{v}| \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{R},$$

wenn R der Radius des Kreises ist. Seine Richtung dreht sich, wie diejenige des Geschwindigkeitsvektors, mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{|\mathfrak{v}|}{R}$. Man sieht ohne weiteres ein, daß $\ddot{\mathfrak{v}}$ ein zu $\dot{\mathfrak{v}}$ senkrechter Vektor vom Betrage

$$|\ddot{\mathfrak{v}}| = |\dot{\mathfrak{v}}| \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{R} = |\mathfrak{v}| \cdot \frac{\mathfrak{v}^2}{R^2}$$

ist; er weist in die entgegengesetzte Richtung, wie $\mathfrak{v}$, so daß man hat:

$$\ddot{\mathfrak{v}} = - \mathfrak{v} \cdot \frac{\mathfrak{v}^2}{R^2}.$$

Demnach ergibt (85)

$$\mathfrak{K}^s = - \mathfrak{v} \cdot \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\mathfrak{v}^2}{\varkappa^4 R^2}, \quad \varkappa^2 = 1 - \beta^2. \tag{88}$$

Die Reaktionskraft ist der Bewegung entgegengerichtet; sie ist dem Quadrate des Kreisradius umgekehrt proportional und steigt mit wachsender Geschwindigkeit an, wie

$$\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^2}.$$

1) Diesen Ausdruck hat der Verfasser auf der Tagung der British Association in Cambridge (1904) angegeben. Der obige Eindeutigkeitsbeweis wurde dort nur skizziert.

Für die Arbeit der Reaktionskraft erhält man

$$\int_1^2 dt' (\mathfrak{v}\,\mathfrak{K}^s) = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\int_1^2 dt' \frac{\mathfrak{v}^4}{\varkappa^4 R^2} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\int_1^2 dt' \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4},$$

was selbstverständlich mit (84b) übereinstimmt. Die Übereinstimmung mit (84a) ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Sie wurde ja auch nur postuliert für eine Bewegung, die mit dem Werte Null von $\dot{\mathfrak{v}}$ beginnt und endigt, während dazwischen sich $\dot{\mathfrak{v}}$ stetig ändert. Es ist also, bevor das Elektron die Kreisbewegung beginnt und nachdem es dieselbe beendigt hat, je ein Intervall anzunehmen, in welchem $\dot{\mathfrak{v}}$ von Null in stetiger Weise zu seinem, der Kreisbewegung entsprechenden Werte übergeht und wieder zum Werte Null zurückkehrt. Für den Kreisbogen, zusammen mit diesen beiden Intervallen, ist, wie aus dem gegebenen Beweise folgt, das Zeitintegral der Reaktionskraft durch (84a) bestimmt.

Betrachten wir übrigens zwei Bewegungen, die um einen ganzen Umlauf voneinander verschieden sind, bei denen aber die Überführung in die Kreisbahn und die Zurückführung in die gleichförmige Bewegung längs genau derselben Bahn geschah, so folgt aus der Gültigkeit von (84a, b) für die beiden betrachteten Bahnen: Für einen ganzen Umlauf müssen die Relationen (84a) und (84b) erfüllt sein. Das gilt übrigens ganz allgemein für periodische Bewegungen. Denkt man den oben gegebenen Beweis noch einmal durch, so sieht man ein, daß die von den Integrationsgrenzen herrührenden Terme sich auch dann fortheben, wenn zu den Zeiten t_1' und t_2' die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\dot{\mathfrak{v}}$ die gleichen sind. Ist der Bewegungszustand an den Grenzen des Integrationsintervalles derselbe, wie z. B. bei einer periodischen Bewegung zu zwei durch eine Periode getrennten Zeiten, so gelten die Relationen (84a, b) ohne weiteres für die durch (85) gegebene Kraft. Bei der soeben behandelten Kreisbewegung z. B. ergibt das Zeitintegral von (88) für einen ganzen Umlauf den Wert Null, was mit (84a) übereinstimmt.

b) Gleichförmige Bewegung längs einer Kreisschraube.

Wir setzen

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2,$$

indem wir unter $\mathfrak{v}_1$ den konstanten Vektor verstehen, welcher die Projektion von $\mathfrak{v}$ auf die Achse der Schraube darstellt, unter $\mathfrak{v}_2$ hingegen die Projektion von $\mathfrak{v}$ auf eine zur Schraubenachse senkrechte Ebene. Der Beschleunigungsvektor $\dot{\mathfrak{v}}$ liegt in dieser Ebene; er ist senkrecht zu $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, mithin auch zu $\mathfrak{v}$ gerichtet, so daß $(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})$ auch hier gleich Null ist. Ferner gilt

$$\ddot{\mathfrak{v}} = \ddot{\mathfrak{v}}_2 = -\mathfrak{v}_2 \frac{\mathfrak{v}_2^2}{R_2^2},$$

wo R_2 der Radius der durch $\mathfrak{v}_2$ dargestellten Kreisbewegung ist. Wir erhalten also aus (85)

$$\mathfrak{K}^s = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\mathfrak{v}_2 \cdot \frac{\mathfrak{v}_2^2}{\varkappa^2 R_2^2} + \mathfrak{v} \cdot \frac{\mathfrak{v}_2^4}{c^2 \varkappa^4 R_2^2}\right\}$$

oder, indem wir $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$ einführen und

$$\beta_1^2 = \frac{\mathfrak{v}_1^2}{c^2}, \quad \beta_2^2 = \frac{\mathfrak{v}_2^2}{c^2},$$

daher

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \beta^2$$

setzen:

$$\mathfrak{K}^s = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\mathfrak{v}_1 \cdot \frac{\beta_2^2}{\varkappa^4}\frac{\mathfrak{v}_2^2}{R_2^2} + \mathfrak{v}_2 \cdot \frac{(1-\beta_1^2)}{\varkappa^4}\frac{\mathfrak{v}_2^2}{R_2^2}\right\}. \tag{89}$$

Die **Reaktionskraft der Strahlung ist die Resultante zweier Kräfte, von denen die erste der Bewegung längs der Schraubenachse, die zweite der Kreisbewegung in der zur Achse senkrechten Ebene entgegen wirkt.** Sind die Abmessungen der Schraube solche, daß $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ von derselben Größenordnung werden, so überwiegt bei langsamer Bewegung die zweite, der Kreisbewegung entgegen wirkende Komponente. Bei raschen Bewegungen von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit jedoch kommt auch die erste Komponente in Betracht; es wird daher ein im homogenen magnetischen Felde sich sehr rasch bewegendes Elektron nicht nur in der Kreisbewegung um die magnetischen Kraftlinien,

sondern auch in der translatorischen Bewegung längs der Kraftlinien gehemmt werden, falls die Rückwirkung der Strahlung in Betracht kommt.

Nach der Formel (7b) des § 2 ist bei der Schraubenbewegung im homogenen magnetischen Felde

$$\frac{\mathfrak{v}_2^2}{R_2^2} = \eta^2 \mathfrak{H}^2,$$

wo η die spezifische Ladung des Elektrons ist (η nimmt, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, mit wachsendem β ab). Es wird demnach (89)

$$\mathfrak{R}' = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\eta^2 \mathfrak{H}^2}{\varkappa^4}\left\{\mathfrak{v}_1 \beta_2^2 + \mathfrak{v}_2 (1-\beta_1^2)\right\}, \tag{89a}$$

was bei Kreisbewegung senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien übergeht in

$$\mathfrak{R}' = -\mathfrak{v}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\eta^2 \mathfrak{H}^2}{\varkappa^4}. \tag{89b}$$

Übrigens ist anzumerken, daß bei der Anwendung dieser Formeln auf die Kathodenstrahlen Vorsicht geboten ist. Es handelt sich bei den Kathodenstrahlen nicht um ein einzelnes Elektron, sondern um eine ganze Schar von Elektronen, die parallele Bahnen beschreiben. Da die ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße durch den Poyntingschen Vektor bestimmt wird und dieser das äußere Produkt der beiden Feldstärken ist, so superponieren sich im allgemeinen zwar die Felder der einzelnen Elektronen, aber nicht die ausgestrahlten Beträge der Energie und der Bewegungsgröße. Denkt man sich z. B. eine Anzahl von Elektronen auf einem Kreise in gleichen Abständen angeordnet und mit der gleichen Geschwindigkeit längs des Kreises bewegt, so wird die Ausstrahlung um so geringer, je größer die Zahl der Elektronen ist. Im Grenzfalle sehr vieler Elektronen strahlt diese Elektrizitätsbewegung wie ein stationärer Strom, d. h. sie strahlt überhaupt nicht. Hieraus folgt, daß auch die Rückwirkung der Strahlung auf das einzelne Elektron eine andere ist, wenn noch andere in der gleichen Weise bewegte Elektronen zugegen sind. Man

muß dann bei der Behandlung der Strahlung und der Strahlungskräfte den Elektronenschwarm als Ganzes behandeln.

Anders liegen die Verhältnisse bei der Lichtemission. Nehmen wir an, daß in jedem lichtentsendenden Molekül nur ein einziges Elektron schwingt, so sind die Schwingungen der einzelnen Elektronen unabhängig voneinander. Die Phasendifferenz zweier Elektronenschwingungen ist eine ganz beliebige, und daher tritt bei der Superposition der entsandten Wellen ebensooft eine Schwächung wie eine Verstärkung der Strahlung durch Interferenz ein. Bei der Mittelwertsbildung über eine große Zahl von Molekülen und über eine große Zahl von Schwingungen ergibt sich eine Strahlung, die gleich der Summe der Strahlungen der einzelnen Moleküle ist. Hier ist also das Ergebnis dasselbe, als wenn jedes Molekül für sich allein die Schwingungen ausgeführt und die Strahlung entsandt hätte; man kann in diesem Falle auch die Rückwirkung der Strahlung auf die Schwingungen angeben, ohne auf die Wechselwirkungen der Moleküle Rücksicht zu nehmen. Hat man es mit kleinen Schwingungen zu tun, deren Geschwindigkeit klein ist gegen die Lichtgeschwindigkeit, so ergibt (85)

$$\mathfrak{K}^s = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathfrak{v}}$$

als Reaktionskraft der Strahlung. Das war der Ansatz, den wir in § 9 (Gleichung 58) gemacht hatten. Dort konnten wir die Annahme dieses Wertes nur dadurch rechtfertigen, daß wir daraus den richtigen Wert für die ausgestrahlte Energie erhielten; das dort entwickelte elektromagnetische Bild des leuchtenden Punktes ergab keine Ausstrahlung von Bewegungsgröße, wie ja auch $\ddot{\mathfrak{v}}$, über eine Schwingung integriert, den Wert Null liefert. Wir haben nunmehr von einem allgemeineren Standpunkte aus, unter Berücksichtigung der bei strenger Durchführung der Rechnung sich ergebenden Ausstrahlung von Bewegungsgröße, diesen Ausdruck für die Rückwirkung der Strahlung auf die Schwingungen eines ruhenden Dipols als richtig dargetan und damit auch die

Differentialgleichung (58b) für die kleinen Schwingungen eines Dipols begründet.

Für den bewegten leuchtenden Punkt führt die Integration über eine Schwingung von (85) zu (84a, b) zurück, und es ergibt sich die der Bewegung entgegen wirkende Kraft, welche wir im vorigen Paragraphen kennen gelernt haben (Gleichung 83a, d).

Übrigens liegt den Entwickelungen dieses Paragraphen, wie denen der vorangehenden, die Annahme einer Punktladung zugrunde. Dadurch ist die Lichtgeschwindigkeit und deren Nachbarschaft sowie selbstverständlich die Überlichtgeschwindigkeit ausgeschlossen. Es wäre durchaus unzulässig, wenn wir etwa aus dem Unendlichwerden der Reaktionskraft für $\beta = 1$ schließen würden, daß ein Strahlung aussendendes Elektron nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegt werden kann. Auf eine beschleunigte Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit sind unsere Formeln nicht mehr anzuwenden; denn das Elektron ist nicht als Punktladung anzusehen, sondern es besitzt, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden, endliche Abmessungen. In der unmittelbaren Nähe der Lichtgeschwindigkeit versagen demnach unsere durch die Bedingung (63b) in ihrer Gültigkeit eingeschränkten Formeln. Die Frage nach der Erreichung und Überschreitung der Lichtgeschwindigkeit kann nur auf Grund bestimmter Voraussetzungen über die Form und die Ladungsverteilung des Elektrons in Angriff genommen werden.

Drittes Kapitel.

Die Mechanik der Elektronen.

§ 16. Die Grundhypothesen der Dynamik des Elektrons und das elektromagnetische Weltbild.

Im vorigen Kapitel, wo wir die von einem beschleunigten Elektron entsandte Wellenstrahlung behandelten, kam nur das Feld in großen Entfernungen vom Elektron in Betracht. Nun

ist aber für die Rückwirkung auf das bewegte Elektron hauptsächlich die Energie und die Bewegungsgröße des Feldes, welches das Elektron unmittelbar umgibt, von Bedeutung. Man gewinnt eine Vorstellung von der Art des Einflusses, welchen das mitgeführte Feld auf die Bewegung des Elektrons ausübt, indem man an die Analogie des elektrischen Leitungsstromes anknüpft (vgl. Bd. I, § 63).

Ein Leitungsstrom ist von einem magnetischen Felde umgeben, dessen Energie dem Quadrate der Stromstärke proportional ist. So erklärt es sich, daß dem Anwachsen der Stromstärke eine „elektromotorische Kraft der Selbstinduktion" entgegen wirkt, welche der zeitlichen Änderung der Stromstärke proportional ist. Der Konvektionsstrom, den das bewegte Elektron darstellt, wird gleichfalls von magnetischen Kraftlinien umschlungen; die magnetische Energie ist, bei langsamer Bewegung wenigstens, auch hier dem Quadrate der Stromstärke proportional. Da nun die Stromstärke in diesem Falle der Geschwindigkeit des Elektrons proportional ist, so wird der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion hier eine Kraft entsprechen, welche der Beschleunigung des Elektrons proportional und ihr entgegen gerichtet ist. Der Gedanke Maxwells, welcher die „elektrokinetische" Energie des elektrischen Stromes mit der kinetischen Energie bewegter träger Massen verglich (Bd. I, § 64), nimmt hier eine noch greifbarere Form an, als beim Leitungsstrome. Jene vom magnetischen Felde herrührende, einer Beschleunigung des Elektrons entgegen wirkende Kraft entspricht in der Tat durchaus der Trägheitskraft der gewöhnlichen Mechanik; es wird mithin ein bewegtes elektrisches Teilchen infolge des mitgeführten elektromagnetischen Feldes eine träge Masse besitzen, welche man, zum Unterschiede von der trägen Masse wägbarer Teilchen, als „scheinbare" oder besser als „elektromagnetische" Masse bezeichnen kann. Bei den unmittelbar an Maxwell anknüpfenden englischen Forschern J. J. Thomson[1]) und

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 11, S. 229. 1881.

O. Heaviside[1]) findet sich zuerst die Vorstellung einer solchen „scheinbaren Masse“ der konvektiv bewegten Elektrizität.

Der Begriff der elektromagnetischen Trägheit gewann eine aktuelle Bedeutung, als man in den Kathodenstrahlen (vgl. § 2) rasch bewegte elektrische Teilchen kennen lernte. Wenn anders der Konvektionsstrom überhaupt ein magnetisches Feld erregt — und die Versuche von H. A. Rowland (vgl. Bd. I, S. 425) konnten hieran kaum zweifeln lassen —, so mußten die im Kathodenstrahle bewegten Elektronen eine elektromagnetische Masse besitzen. Die allgemeinste zulässige Annahme war die, daß diese negativen Elektronen sowohl elektromagnetische Masse, als auch „materielle“ Masse besitzen. Dabei ist unter „materieller Masse“ diejenige zu verstehen, welche der wägbaren Materie zukommt und welche z. B. den elektrochemischen Ionen anhaftet. Wir haben indessen bereits in § 2 auf die Schwierigkeiten hingewiesen, welche vom atomistischen Standpunkte aus der Auffassung der Masse des negativen Elektrons als einer materiellen Masse entgegenstehen. Man wäre vor die Alternative gestellt, entweder den Kathodenstrahlteilchen an Stelle eines einzigen 2000 elektrische Elementarquanten zuzuschreiben, oder aber die Atome der wägbaren Materie nicht als unteilbar zu betrachten Diese Schwierigkeiten werden keineswegs gehoben, wenn man die Trägheit der Elektronen zum Teil als materielle, zum Teil als elektromagnetische betrachtet. Sie verschwinden jedoch sofort, wenn man die Masse des negativen Elektrons als rein elektromagnetische Masse betrachtet. Auf die Möglichkeit einer solchen, alle überlieferten Anschauungen umwälzenden Lösung wurde von verschiedenen Seiten hingewiesen, und es wurde bemerkt, daß die Entscheidung der Frage von den Trägheitserscheinungen abhängt, welche die Elektronen zeigen, wenn sie mit noch größeren Geschwindigkeiten, als in den Kathodenstrahlen, sich bewegen. In der Tat, die materielle Masse wägbarer Teilchen muß, wenn anders die Axiome der gewöhn-

---

1) O. Heaviside, Phil. Mag. (5) 27, S. 324. 1889.

lichen Mechanik richtig sind, eine Konstante sein; sie muß unabhängig von der Geschwindigkeit sein, mit der die Bewegung erfolgt. Die elektromagnetische Masse hingegen, die von dem elektromagnetischen Felde herrührt, wird, wie das Feld selbst, von der Geschwindigkeit abhängen, mit welcher das Elektron den Äther durchfliegt.

Gerade als die Erörterung der Frage bis zu diesem Punkte gelangt war, lernte man in den β-Strahlen des Radiums negative Elektronen kennen, die noch rascher als die Kathodenstrahlteilchen sich bewegen. Es zeigte nämlich W. Kaufmann[1]), daß die Geschwindigkeit für verschiedene Teilchen eine verschiedene ist und daß das „Spektrum" von $^2/_3$ der Lichtgeschwindigkeit bis dicht an die Lichtgeschwindigkeit heran sich erstreckt. Auch stellten bereits die ersten Versuche Kaufmanns es außer Zweifel, daß die Trägheit dieser Teilchen mit wachsender Geschwindigkeit ansteigt. Hieran anknüpfend hat der Verfasser dieses Werkes es unternommen[2]), eine Dynamik des Elektrons auszuarbeiten, welche geeignet war, die Versuche Kaufmanns auf rein elektromagnetischer Grundlage zu deuten. Die erhaltenen Ergebnisse wurden durch W. Kaufmanns weitere Untersuchungen bestätigt[3]), so daß bereits auf der Karlsbader Naturforscherversammlung (1902) ausgesprochen werden konnte[4]): Die Masse des Elektrons ist rein elektromagnetischer Art.

In diesem Paragraphen sollen die Grundhypothesen dargelegt werden, auf denen die Dynamik des Elektrons beruht.

Zu diesen Grundhypothesen gehören selbstverständlich die in § 4 entwickelten allgemeinen Feldgleichungen der Elektronentheorie (I bis IV), sowie der Lorentzsche Ansatz (V) für die elektromagnetische Kraft. Zu ihnen tritt die für die atomistische Theorie der Elektrizität fundamentale Vorstellung, daß die Gesamtladung e, die wir als elektrisches Elementarquantum

1) W. Kaufmann, Gött. Nachr. 1901, S. 143.
2) M. Abraham, Gött. Nachr. 1902, S. 20. Ann. d. Phys. 10, S. 105. 1903.
3) W. Kaufmann, Gött. Nachr. 1902, S. 291; 1903, S. 90.
4) W. Kaufmann u. M. Abraham, Phys. Zeitschr. 4, S. 54 u. 57. 1902.

bezeichnet haben (§ 1), über einen gewissen Bereich verteilt ist. Diesen Bereich nebst seiner Ladung nennen wir das „Elektron". Er kann als Ganzes im Raume bewegt, aber nicht geteilt werden. An der Elektrizität, die mit der Dichte ϱ über das Volum des Elektrons verteilt ist, greift nun die durch die Grundgleichung (V) definierte elektromagnetische Kraft an. Dieselbe setzt sich aus zwei Teilen zusammen, erstens der elektromagnetischen Kraft des äußeren Feldes, die wir $\mathfrak{F}^a$ schreiben, und zweitens der vom Elektron auf sich selbst ausgeübten „inneren elektromagnetischen Kraft". Es ist für das Folgende bequem, diese letztere einfach $\mathfrak{F}$ zu schreiben. Daß man die „innere" und die „äußere" Kraft trennen kann, rührt von dem in der linearen Form der Feldgleichungen analytisch zum Ausdruck gebrachten Superpositionsprinzipe her; diesem Prinzipe zufolge überlagern sich die Felder $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}^a$, $\mathfrak{H}^a$, welche einerseits von dem betrachteten Elektron selbst, anderseits von den übrigen Elektronen erregt werden. Durch diese Felder aber bestimmen sich die auf die Einheit der Ladung berechneten inneren und äußeren elektromagnetischen Kräfte folgendermaßen:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{H}\right],$$

$$\mathfrak{F}^a = \mathfrak{E}^a + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{H}^a\right].$$

Da wir nun die Dynamik des Elektrons rein elektromagnetisch zu begründen beabsichtigen, so dürfen wir andere, als elektromagnetische Kräfte, überhaupt nicht einführen. Wir postulieren vielmehr: *Es soll die resultierende Kraft und das resultierende Kraftmoment der an den Volumelementen des Elektrons angreifenden elektromagnetischen Kräfte verschwinden:*

$$\text{(VI)} \qquad \int dv\,\varrho\,\{\mathfrak{F} + \mathfrak{F}^a\} = 0,$$

$$\text{(VIa)} \qquad \int dv\,\varrho\,[\mathfrak{r}, \mathfrak{F} + \mathfrak{F}^a] = 0.$$

Diese zu den allgemeinen Grundgleichungen (I bis V) der Elektronentheorie tretenden besonderen Grundgleichungen der Dynamik des Elektrons habe ich als die „dynamischen Grundgleichungen“ bezeichnet. Sie sagen aus, daß die inneren und die äußeren elektromagnetischen Kräfte sich an dem Elektron im Sinne der Mechanik starrer Körper das Gleichgewicht halten. Auf ihnen muß eine jede elektromagnetische Begründung der Dynamik des Elektrons fußen. Sobald man zuläßt, daß neben den elektromagnetischen Kräften noch andere vorhanden sind, die eine Translation oder Rotation hervorzurufen streben, kann von einer elektromagnetischen Begründung überhaupt keine Rede mehr sein.

Wir müssen dem Elektron eine endliche Ausdehnung deshalb zuschreiben, weil für eine Punktladung die Feldstärken des von der Ladung selbst erregten Feldes und daher auch die innere elektromagnetische Kraft am Orte der Punktladung selbst dem Betrage nach unendlich und der Richtung nach unbestimmt wird. Dieser Umstand verbietet uns, in den dynamischen Grundgleichungen zur Grenze der Punktladung überzugehen. In der Tat wird, wie wir sehen werden, bei diesem Grenzübergang die elektromagnetische Energie sowohl wie die elektromagnetische Bewegungsgröße unendlich. Schreiben wir nun dem Elektron eine zwar kleine, aber doch endliche Ausdehnung zu, so können wir nicht umhin, das Elektron als einer Rotation fähig zu betrachten. Ein Gegenstück des ausdehnungslosen „materiellen Punktes“ der analytischen Mechanik existiert in der elektromagnetischen Mechanik nicht. Die einfachste Annahme, die man über die Bewegungsfreiheit des Elektrons machen kann, ist die folgende: **Das Elektron ist nur einer Translation und einer Rotation fähig.** Die allgemeinste Bewegung des Elektrons wird dieser Annahme gemäß durch die „**kinematische Grundgleichung**“

$$\text{(VII)} \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$$

dargestellt, welche der in der Kinematik des starren Körpers (Bd. I, § 9) gültigen Gleichung (Gl. 35, S. 25) vollkommen

entspricht. *Diese unsere kinematische Grundgleichung sagt aus, daß die Elektrizität an den Volumelementen des Elektrons haftet, wie die wägbare Materie an den Volumelementen des starren Körpers.* Es stellt in (VII) $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit eines im Innern des Elektrons gewählten Bezugspunktes dar, $\mathfrak{r}$ den von ihm aus konstruierten Radiusvektor und $\mathfrak{u}$ die Drehgeschwindigkeit des Elektrons um den Bezugspunkt. Den sechs durch die kinematische Grundgleichung zugelassenen Freiheitsgraden stehen sechs aus den dynamischen Grundgleichungen fließende Beziehungen gegenüber, ganz wie in der Mechanik starrer Körper.

Wenn wir die Kinematik des Elektrons der Kinematik des starren Körpers nachbilden, erreichen wir für die Dynamik des Elektrons ähnliche Vorteile, wie sie die analytische Mechanik durch Annahme starrer Verbindungen erzielt. Indem nämlich die analytische Mechanik der Kinematik der Massensysteme solche Bedingungsgleichungen zugrunde legt, zu deren Aufrechterhaltung keine Arbeitsleistung (weder eine positive, noch eine negative) erforderlich ist, braucht sie Kräfte, welche die verkoppelten Massen aufeinander ausüben, nicht einzuführen. Sie kann diese Kräfte auffassen als Folge der angenommenen Bedingungsgleichungen; es ist aber überflüssig, von diesen Kräften zu reden, da dieselben niemals Arbeit leisten, weder bei der wirklichen Bewegung, noch bei virtuellen Bewegungen. Daher kann die analytische Mechanik bei der Behandlung starrer Massensysteme davon absehen, eine innere „potentielle Energie“ der Körper heranzuziehen. Aus den Bedingungsgleichungen der bewegten Massen und ihrer kinetischen Energie ergeben sich ohne weiteres die Bewegungsgleichungen des Systemes. Dieser Grundgedanke der analytischen Mechanik Lagranges ist bekanntlich von Heinrich Hertz in seiner Darstellung der Prinzipien der Mechanik am konsequentesten durchgeführt worden. H. Hertz wünscht den Begriff der potentiellen Energie aus den Grundlagen der Mechanik zu verbannen. Er postuliert die Zurückführung der potentiellen Energie auf die lebendige Kraft verborgener Systeme träger Massen; diese Massen sollen

durch „starre“ Verbindungen miteinander verkoppelt sein; alle Kräfte, auch anscheinende „Fernkräfte“, sollen in Wirklichkeit durch Mechanismen verborgener Massen übertragen sein, welche auch die anscheinend getrennten materiellen Körper miteinander verkoppeln. Nun sind jedoch die Verbindungen, welchen wir in der wirklichen Körperwelt begegnen, keineswegs „starr“. Auch die festen Körper besitzen die Eigenschaft der Elastizität, Reibung usf. Daher reichen für eine erschöpfende Darstellung der Bewegungsvorgänge die Ansätze der analytischen Mechanik nicht aus, man muß vielmehr die thermischen Vorgänge berücksichtigen, welche die Bewegungen begleiten.

Dieser Einsicht verschließt sich Hertz keineswegs. Da er aber alle physikalischen Vorgänge, auch die thermischen, als Bewegungsvorgänge aufzufassen wünscht, so kann er nicht umhin, anzunehmen, daß in der Welt der Atome die starren Verbindungen seiner Mechanik verwirklicht sind. In der Tat, wäre die Bewegung der Atome mit Reibungs- und Formänderungsarbeit verbunden, so wäre es logisch unmöglich, die Wärme der Körper als eine Art von Bewegung aufzufassen. Will man das mechanische Weltbild in folgerichtiger Weise zeichnen und dabei die potentielle Energie aus den Grundlagen der Mechanik verbannen, so muß man fordern, daß die kinematischen Zusammenhänge der kleinsten Teilchen „starr“ im Sinne der Hertzschen Mechanik sind.

Wir haben die Bedeutung dieses mechanischen Weltbildes für die Elektrodynamik im ersten Bande dieses Werkes (§ 64) erörtert, als wir die Maxwellsche Ableitung der Induktionsgesetze aus den Lagrangeschen Gleichungen vortrugen. Wir erwähnten dort bereits, daß diese Maxwellsche Analogie der Selbstinduktion zur Massenträgheit nicht unbedingt zugunsten des mechanischen Weltbildes gedeutet zu werden braucht, sondern daß man mit demselben Rechte umgekehrt versuchen kann, die Massenträgheit aus den Gesetzen der Elektrodynamik abzuleiten und so die Mechanik elektromagnetisch zu begreifen. Wir sind jetzt zu dem Punkte gekommen, wo das „elektro-

magnetische Weltbild“ auf seine Richtigkeit zu prüfen ist. Die elektromagnetische Masse des Elektrons ist nichts anderes, als die Selbstinduktion des Konvektionsstromes. Ist die Dynamik des Elektrons rein elektromagnetisch begründet und die Trägheit der Elektronen auf ihre Selbstinduktion, d. h. auf die Rückwirkung ihres Feldes, zurückgeführt, so haben wir den Stützpunkt gewonnen, von dem aus wir die mechanische Naturanschauung in ihren Grundlagen erschüttern können. Wir können dann wagen, die kinetische und die potentielle Energie der Mechanik, und alle Energieformen überhaupt, als magnetische und elektrische Energie zu deuten und so ein elektromagnetisches Weltbild an die Stelle des mechanischen zu setzen.

Obwohl wir eine Tendenz verfolgen, welche derjenigen der Hertzschen Mechanik diametral entgegengesetzt ist, soll uns doch hinsichtlich der Folgerichtigkeit der Durchführung dieser Tendenz die Hertzsche Mechanik vorbildlich sein. Wollen wir an Stelle der kinetischen und der potentiellen Energie der Mechanik die elektromagnetische Energie setzen, so müssen wir der Dynamik der elektrischen Atome kinematische Verbindungen zugrunde legen, deren Aufrechterhaltung weder einen Energieverlust, noch einen Energiegewinn mit sich bringt; sonst ist die gesamte elektromagnetische Energie des Feldes nicht konstant, und es wird die Einführung einer nicht elektromagnetischen Energieform doch wieder notwendig. Das elektromagnetische Weltbild kann nicht umhin, der Kinematik der Elektronen Bedingungsgleichungen zugrunde zu legen, welche den „starren“ Verbindungen der Hertzschen Mechanik entsprechen. Nur auf solchen kinematischen Grundgleichungen fußend, ist die Dynamik des Elektrons ohne logische Widersprüche elektromagnetisch zu begründen. Nur die Übereinstimmung der Ergebnisse einer so begründeten Dynamik des Elektrons mit dem Experimente kann zur weiteren Verfolgung des elektromagnetischen Weltbildes ermutigen. Die einfachste aller in den Rahmen der analytischen Mechanik fallenden Bedingungs-

gleichungen war es, die wir als kinematische Grundhypothese wählten. Auch über die Form des Elektrons werden wir meist die einfachste denkbare Annahme machen. Wir werden das Elektron als Kugel betrachten, mit einer in konzentrischen Schichten homogenen Verteilung der Ladung; insbesondere werden wir zwei Grenzfälle, nämlich die homogene Volumladung und die homogene Flächenladung, bevorzugen. Beide führen hinsichtlich der elektromagnetischen Masse zu demselben, mit den Versuchen Kaufmanns übereinstimmenden Ergebnisse. Erst dann, wenn künftige Experimente mit diesen speziellen Annahmen sich als unverträglich erweisen sollten, würde man zu komplizierteren Annahmen über die Form und die Ladungsverteilung des Elektrons überzugehen geneigt sein. Man würde auch daran denken, dem Elektron mehr als sechs Grade der Freiheit zu geben; aber stets wären die kinematischen Verbindungen so zu wählen, daß sie als „starre" Verbindungen im Sinne der Hertzschen Mechanik zu bezeichnen wären. Vorläufig allerdings erscheint der Übergang zu komplizierteren kinematischen Grundgleichungen unzweckmäßig.

Halten wir an der kinematischen Grundgleichung (VII) fest, so brauchen wir von „Kräften", welche die Volumelemente des Elektrons aufeinander ausüben, überhaupt nicht zu reden. Die einzigen „Kräfte", die in Frage kommen, sind die elektromagnetischen Kräfte, welche durch die Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^a$ bestimmt sind; diese Vektoren sind nur Hilfsgrößen, die definiert sind durch die elektromagnetischen Grundvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ und durch den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$. Die resultierenden Kräfte und Kraftmomente des äußeren und inneren Feldes allein sind es, die in die dynamischen Grundgleichungen (VI und VIa) eingehen. Von „Kräften" aber, welche das Elektron zu deformieren bestrebt sind, spricht unsere Dynamik des Elektrons überhaupt nicht. Die kinematische Grundgleichung bedingt es, daß solche Kräfte niemals Arbeit leisten können; von unserem Standpunkte aus ist die Einführung solcher Kräfte überflüssig.

Anders liegt hingegen die Sache, wenn man die kinematische Grundgleichung (VII) fallen läßt und eine Form-

änderung des Elektrons als möglich ansieht. Dann müssen nicht nur die resultierenden Kräfte und Kraftmomente am Elektron im ganzen sich das Gleichgewicht halten, sondern es muß an jedem Volumelemente des Elektrons Gleichgewicht bestehen, da ja eine am Volumelemente haftende „materielle“ Masse nicht angenommen werden soll. Dann muß man schon für das ruhende Elektron annehmen, daß neben den elektrischen noch innere elastische Kräfte wirken, welche es verhindern, daß die Volumelemente ihrer gegenseitigen Abstoßung Folge leisten. Diese Kräfte müssen ganz enorme sein; denn die elektrischen Kräfte, welche an der Oberfläche des Elektrons angreifen, übertreffen, weil die Abmessungen des Elektrons so außerordentlich klein sind, die experimentell herstellbaren elektrischen Kräfte um das billionenfache. Bewegt sich nun das Elektron als Ganzes translatorisch oder rotatorisch, so werden die elektromagnetischen Kräfte abgeändert werden, und mit ihnen die elastischen, derart, daß an jedem Volumelemente die elektrischen und die elastischen Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Die Abänderung der elastischen Kräfte wird von einer Formänderung begleitet sein. Der Translationsbewegung und der Rotationsbewegung wird sich demnach eine innere Formänderungsbewegung überlagern, die ihrerseits das innere Feld beeinflußt. Man hat, präzis gesprochen, neben den Gleichgewichtsbedingungen für die Volumelemente noch die Feldgleichungen (I bis IV) zu erfüllen und hat zu zeigen, daß die hinsichtlich der elastischen Kräfte gemachten Annahmen zu keinen Widersprüchen führen. Eine solche, nachgewiesenermaßen widerspruchsfreie Theorie eines deformierbaren Elektrons existiert bisher nicht. Sollte sie sich durchführen lassen und dem Experimente gegenüber sich gleichfalls bewähren, so wäre sie unserer Theorie gegenüber noch insofern im Nachteile, als sie gezwungen wäre, außer der elektromagnetischen Energie noch eine innere potentielle Energie von der Art der inneren Energie elastischer Körper einzuführen, deren Abnahme die von den elastischen Kräften geleistete Arbeit kompensiert. Man würde dann die Trägheits-



kräfte verbannt, aber dafür die weniger gut verstandenen elastischen Kräfte aus der Mechanik übernommen haben. Man würde die kinetische Energie der Elektronen auf die elektromagnetische Feldenergie und eine innere potentielle Energie zurückgeführt haben. Die Übereinstimmung einer solchen Dynamik des Elektrons mit dem Experimente wäre gewiß nicht als eine Bestätigung des elektromagnetischen Weltbildes aufzufassen.

Wir werden in diesem Werke an der Hypothese des „starren" Elektrons festhalten; auf Grund dieser Hypothese werden wir die Frage zur Entscheidung zu bringen suchen, ob die Dynamik des Elektrons rein elektromagnetisch begründet und so die Konvektionsstrahlung freier Elektronen als rein elektrischer Vorgang aufgefaßt werden kann. Ein weiterer Schritt auf dem Wege der elektromagnetischen Weltanschauung wäre die Deutung der Kräfte, welche die Materie auf die Elektronen ausübt, z. B. der quasielastischen Kräfte (vgl. § 9), auf rein elektromagnetischer Basis. Der letzte Schritt endlich wäre die Auffassung der wägbaren Atome und Moleküle als Aggregate von Elektronen, eine Auffassung, welche die Trägheit der Materie ohne weiteres erklären würde, von der man aber auch fordern müßte, daß sie von den Molekularkräften und von den Gravitationskräften in befriedigender Weise Rechenschaft gäbe. Die Welt würde dann allein aus den positiven und negativen Elektronen, und aus dem von ihnen im Raume erzeugten elektromagnetischen Felde bestehen, und alle Naturvorgänge wären als Konvektionsstrahlung der Elektronen oder als von ihnen entsandte Wellenstrahlung zu betrachten. Dieses elektromagnetische Weltbild ist bisher nur ein Programm; hoffen wir, daß die Arbeit der im Dienste dieses Programmes tätigen Forscher von weiteren Erfolgen gekrönt werden möge.

§ 17. **Die Bewegungsgleichungen des Elektrons.**

Ist das „äußere Feld" gegeben, und die jeweilige Lage, Geschwindigkeit und Drehgeschwindigkeit des Elektrons, so sind die r e s u l t i e r e n d e ä u ß e r e K r a f t

(90) $$\mathfrak{K}^a = \int dv\,\varrho\,\mathfrak{F}^a = \int dv\,\varrho\,\left\{\mathfrak{E}^a + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}^a]\right\},$$

und die resultierende äußere Drehkraft

(90a) $$\mathfrak{N}^a = \int dv\,\varrho\,[\mathfrak{r}\mathfrak{F}^a] = \int dv\,\varrho\left[\mathfrak{r},\,\mathfrak{E}^a + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}^a]\right]$$

gleichfalls bestimmt. Für das kugelförmige Elektron wird man als Momentenpunkt den Mittelpunkt desselben wählen, und von diesem aus den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ konstruieren. In der kinematischen Grundgleichung gibt dann $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit dieses Mittelpunktes, $\mathfrak{u}$ die Drehgeschwindigkeit des Elektrons um seinen Mittelpunkt an.

Nimmt man die Ladungsverteilung im Elektron nicht als allseitig symmetrisch an, so wird man als Momentenpunkt den durch die Gleichung

(90b) $$\int dv\,\varrho\,\mathfrak{r} = 0$$

definierten Punkt wählen, der dem „Massenmittelpunkte" der Mechanik entspricht, und der in diesem Falle schlechtweg als „Mittelpunkt des Elektrons" bezeichnet werden mag.

Bei reiner Translationsbewegung ($\mathfrak{u} = 0$) ist die äußere Kraft

(91) $$\mathfrak{K}_1^a = \int dv\,\varrho\,\mathfrak{E}^a + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}_0, \int dv\,\varrho\,\mathfrak{H}^a\right].$$

Ist das äußere Feld innerhalb des vom Elektron eingenommenen Bereiches merklich homogen, so reduziert sich der Translationsbestandteil der äußeren Kraft auf

(91a) $$\mathfrak{K}_1^a = e\left\{\mathfrak{E}^a + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}_0\mathfrak{H}^a]\right\}.$$

Die experimentell herstellbaren konstanten elektrischen und magnetischen Felder sind stets als homogen anzusehen auf Strecken von der Größenordnung eines Elektrondurchmessers; die von ihnen ausgeübte Kraft wird daher stets mit genügender Annäherung durch (91a) angegeben.

Die äußere Drehkraft ist bei reiner Translation

(91b) $$\mathfrak{N}_1^a = \int dv \varrho \, [\mathfrak{r}\,\mathfrak{E}^a] + \frac{1}{c}\int dv \varrho \left[\mathfrak{r}\,[\mathfrak{v}_0 \mathfrak{H}^a]\right].$$

Dieser Ausdruck verschwindet für ein homogenes äußeres Feld, da hier sowohl $\mathfrak{E}^a$, wie $[\mathfrak{v}_0 \mathfrak{H}^a]$ vor das Integralzeichen zu ziehen sind, gemäß (90b). Im homogenen Felde ist der Translationsbestandteil der äußeren Drehkraft gleich Null.

Dreht sich indessen das Elektron um seinen Mittelpunkt, so kommt im magnetischen Felde der Rotationsbestandteil der äußeren Kraft hinzu:

$$\mathfrak{K}_2^a = \frac{1}{c}\int dv \varrho \left[[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}], \mathfrak{H}^a\right],$$

welcher gemäß den Regeln (β) und (δ) in Bd. I, S. 437 zu schreiben ist

(91c) $$\mathfrak{K}_2^a = \frac{1}{c}\int dv \varrho \left\{-\mathfrak{u}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{H}^a) + \mathfrak{r}\,(\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}^a)\right\}.$$

Der Rotationsbestandteil der äußeren Kraft verschwindet gleichfalls im homogenen magnetischen Felde.

Der Rotationsbestandteil der äußeren Drehkraft jedoch

(91d) $$\mathfrak{N}_2^a = \frac{1}{c}\int dv \varrho \, [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{H}^a) = \frac{1}{c}\left[\mathfrak{u}, \int dv \varrho\, \mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{H}^a)\right]$$

ist auch im homogenen magnetischen Felde im allgemeinen von Null verschieden.

Bei um den Mittelpunkt symmetrischer Verteilung der Elektrizität ist er dem äußeren Produkte aus der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ und der Feldstärke $\mathfrak{H}^a$ proportional.

(91e) $$\mathfrak{N}_2^a = \xi\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}^a].$$

Der Koeffizient ξ findet sich nach einer einfachen Rechnung

(91f) $$\begin{cases} \xi = \dfrac{ea^2}{5c} & \text{für Volumladung,} \\ \xi = \dfrac{ea^2}{3c} & \text{für Flächenladung,} \end{cases}$$

wenn a der Radius des kugelförmigen Elektrons ist.

Führen wir die nunmehr als bekannt anzusehenden Vektoren $\mathfrak{K}^a$ und $\mathfrak{N}^a$ in die dynamischen Grundgleichungen (VI, VIa) ein, so lauten diese:

$$\mathfrak{K}^a + \int dv \varrho \mathfrak{F} = 0, \tag{92}$$

$$\mathfrak{N}^a + \int dv \varrho [\mathfrak{r} \mathfrak{F}] = 0. \tag{92a}$$

Es handelt sich nun darum, den Vektor $\mathfrak{F}$, d. h. die elektromagnetische Kraft des vom Elektron selbst erregten Feldes, zu ermitteln.

Wir haben bereits im ersten Kapitel (§ 8) in allgemeinster Weise die Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung behandelt. Wir haben gesehen, daß das Feld, welches zur Zeit t in irgendeinem Aufpunkte herrscht, sich zusammensetzt aus Beiträgen, welche eine mit Lichtgeschwindigkeit sich kontrahierende Kugel dem Aufpunkte zuführt. Und zwar hängen die elektromagnetischen Potentiale von der elektrischen Dichte und von der Dichte des Konvektionsstromes ab, welche die Kugel antrifft; die Feldstärken werden mithin von der Dichte, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Elektrizität abhängen, über welche die Kugel hinweggestrichen ist. Das vom Elektron erregte Feld wird sich demnach durch ein Zeitintegral über die Latenszeit τ oder den Latensweg λ darstellen lassen. Auf diese allgemeine Darstellung des Feldes kommen wir weiter unten (§ 24) zurück.

In die Ausdrücke der inneren Kraft und Drehkraft gehen nun die Feldstärken ein, welche in dem gerade vom Elektron eingenommenen Bereiche herrschen, und die vom Elektron selbst erregt sind. Um sie direkt zu bestimmen, müßte man für jeden Punkt des Elektrons das Feld ermitteln, und sodann die elektromagnetischen Kräfte, welche auf die einzelnen Volumelemente wirken, nach den Regeln der Mechanik starrer Körper zusammensetzen. Hat sich nun das Elektron vorher mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt, so wird für jeden zur Zeit t in sein Inneres fallenden Aufpunkt das Feld abhängen von der Bewegung, welche das Elektron in einem endlichen, der Zeit t

vorangegangenen Zeitintervalle ausgeführt hat, nämlich in dem Zeitintervalle, während dessen die mit Lichtgeschwindigkeit sich kontrahierende Kugel über das Elektron hinweggestrichen ist. Auch bei Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit wird das gleiche gelten; die Abweichung liegt darin, daß hier das Elektron von außen in die sich kontrahierende Kugel hineintritt. Nur wenn die Geschwindigkeit des Elektrons der Lichtgeschwindigkeit gleich ist, oder um diese oszilliert, liegt ein Ausnahmefall vor. Im allgemeinen wird die elektromagnetische Kraft im Innern des Elektrons abhängen von der Geschwindigkeit und Beschleunigung, die das Elektron in einem endlichen, vorangegangenen Zeitintervalle erfahren hat. Das gleiche wird von der resultierenden inneren Kraft und Drehkraft gelten. Wir kommen hierauf weiter unten (§ 26) zurück.

Aus diesen allgemeinen Überlegungen gewinnen wir eine Einsicht in den Sinn unserer dynamischen Grundgleichungen. Wir erkennen, daß diese Gleichungen im Grunde etwas ganz anderes aussagen, als die Prinzipien der gewöhnlichen Mechanik. Während die Mechanik starrer materieller Körper die zeitliche Änderung der jeweiligen Geschwindigkeit und Drehgeschwindigkeit durch die äußere Kraft und Drehkraft bestimmt, wenn die Gestalt und die Massenverteilung des Körpers gegeben ist, ist die Aussage der Grundgleichungen der Dynamik des Elektrons eine weit verwickeltere. Dieselben sind, streng genommen, Funktionalgleichungen, welche die Lage, sowie die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Translation und Rotation, die in einem ganzen Zeitintervalle herrschen, zueinander in eine äußerst verwickelte Beziehung setzen. Man darf daher nicht hoffen, Bewegungsgleichungen zu erhalten, welche gleichzeitig in Strenge gültig sind, und, ähnlich wie die Bewegungsgleichungen des starren Körpers, die Beschleunigung der Translation und Rotation allein durch die jeweils herrschenden äußeren Kräfte bestimmen. Nur indem man spezielle Fälle herausgreift, und sie passend idealisiert, kann man erwarten, zu übersichtlichen, für die Darstellung der beobachtbaren Bewegungen geeigneten Ergebnissen zu gelangen.

Dieses war das Ziel, welches ich bei meinen Untersuchungen über die Dynamik des Elektrons verfolgt habe. Ich habe nachgewiesen, daß die in den Kathodenstrahlen und den Becquerelstrahlen stattfindenden Elektronenbewegungen so wenig beschleunigt sind, daß sie als „quasistationär“ gelten können, d. h. daß das Feld des Elektrons merklich dem bei gleichförmiger Bewegung mitgeführten Feld entspricht (vgl. § 23). Für solche quasistationäre Translationsbewegungen bin ich zu Bewegungsgleichungen gelangt, welche von den in der Mechanik geltenden nicht so sehr verschieden sind. Hier läßt sich das Verhalten des Elektrons auch bei Geschwindigkeiten, die von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit, aber immerhin kleiner als diese selbst sind, durch eine von der jeweiligen Geschwindigkeit abhängige „elektromagnetische Masse“ charakterisieren. Dabei ist jedoch eine andere träge Masse in Rechnung zu setzen, wenn es sich um Beschleunigung parallel der Bewegungsrichtung, oder senkrecht zu ihr handelt. Beide Massen, die „longitudinale“ sowohl, als auch die „transversale“, lassen sich mit Hilfe des elektromagnetischen Impulses (§ 5) in übersichtlicher Weise darstellen. In entsprechender Weise läßt sich aus dem elektromagnetischen Impulsmomente für quasistationäre Drehbewegungen ein „elektromagnetisches Trägheitsmoment“ ableiten.

Wir gewinnen die Grundlage für die Theorie der quasistationären Bewegungen des Elektrons, indem wir die elektromagnetische Bewegungsgröße des vom Elektron erregten Feldes einführen. Deren Dichte ist nach Gleichung (18):

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \tag{93}$$

Der gesamte Impuls des Feldes beträgt

$$\mathfrak{G} = \int dv\, \mathfrak{g}, \tag{93a}$$

und der Drehimpuls

$$\mathfrak{Y} = \int dv\, [\mathfrak{r}\mathfrak{g}]. \tag{93b}$$

Die Umformungen, die zu den Ausdrücken (21) und (26a) für die resultierende Kraft und die resultierende Drehkraft eines beliebigen elektromagnetischen Feldes führten, gelten natürlich auch für das Feld eines einzelnen Elektrons; denn dieses Feld erfüllt eben die Grundgleichungen (I bis IV), auf denen jene Umformungen beruhten. Wir erhalten demnach als resultierende innere Kraft

$$\mathfrak{K} = \int dv \varrho \mathfrak{F} = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}. \tag{93c}$$

Bei der Berechnung des resultierenden Momentes des vom Elektron erregten Feldes ist zu beachten, daß als Momentenpunkt nicht, wie in § 5, ein im Raume fester Punkt, sondern der mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ bewegte Mittelpunkt des Elektrons gewählt wurde. Auf diesen Momentenpunkt soll auch das elektromagnetische Impulsmoment $\mathfrak{Y}$ bezogen werden. Wir können, da das Integral in (93b) über den ganzen Raum zu erstrecken ist, unter $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor verstehen, der vom Mittelpunkt des Elektrons aus nach einem im Raume festen Punkte gezogen ist; dann gilt:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = -\mathfrak{v}_0.$$

Hieraus folgt als zeitliche Änderung des Impulsmomentes

$$\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} = \frac{d}{dt}\int dv\,[\mathfrak{r}\mathfrak{g}] = -[\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{G}] + \int dv \left[\mathfrak{r}\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}\right].$$

Das zweite Glied der rechten Seite war es, auf welches sich die Umformungen des § 5 bezogen, die zu den Gleichungen (26) und (26a) führten; denn dieses Glied stellt die zeitliche Änderung des auf einen im Raume festen Momentenpunkt bezogenen Impulsmomentes dar.

Wir haben daher hier zu schreiben

$$\mathfrak{N} = \int dv \left[\mathfrak{r}, \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}\right].$$

Zwischen dem auf den bewegten Mittelpunkt des Elektrons bezogenen elektromagnetischen Impuls-

momente $\mathfrak{Y}$ und dem resultierenden Momente der inneren elektromagnetischen Kräfte besteht demnach die Beziehung

$$\mathfrak{N} = \int dv \varrho\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}] = [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{G}] + \frac{d\mathfrak{Y}}{dt}. \tag{93 d}$$

Führen wir die Ausdrücke (93c, d) in die dynamischen Grundgleichungen (92, 92a) ein, so nehmen diese die Form an

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K}^a, \tag{94}$$

$$\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{G}] = \mathfrak{N}^a. \tag{94a}$$

Diese Form der dynamischen Grundgleichungen entspricht durchaus den Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, wenn Kraft und Impulsmoment auf einen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ bewegten Momentenpunkt bezogen sind. Sie sind in der Tat formal identisch mit den Bewegungsgleichungen (46) und (48) des starren Körpers, die wir im ersten Bande (§ 12) kennen lernten. Sie beruhen ja auf den Impulssätzen, die für die Bewegungsgröße des elektromagnetischen Feldes ebenso gelten, wie für die an den wägbaren Körpern haftende Bewegungsgröße. Freilich läßt sich für die wägbaren Körper ohne weiteres der Impuls als Funktion der Geschwindigkeit, und der Drehimpuls als Funktion der Drehgeschwindigkeit angeben. In der Dynamik des Elektrons hingegen gewinnt man die Beziehungen, welche den Impuls und das Impulsmoment mit der Geschwindigkeit und der Drehgeschwindigkeit verknüpfen, erst durch Integration der Feldgleichungen; erst nachdem das Feld der betreffenden Bewegung ermittelt ist, lassen sich die durch (93, 93a, b) definierten Integrale über den ganzen Raum auswerten, wodurch dann die Bewegungsgleichungen eine explizite, zur Bestimmung des Verlaufes der Bewegung geeignete Form annehmen.

Neben den Impulsgleichungen ist die Energiegleichung für die Dynamik des Elektrons von Bedeutung. Wir hatten dieselbe bereits in § 4 in allgemeiner Weise aus den Grund-

gleichungen der Elektronentheorie hergeleitet. W, die gesamte Energie des vom Elektron erregten Feldes, ist stets eine endliche, wenn wir bei der Verfolgung der Bewegung von einem anfangs ruhenden Elektron ausgehen, und immer nur endliche äußere Kräfte auf das Elektron wirken lassen. Sie berechnet sich in diesem Falle aus den Feldstärken des vom Elektron erregten Feldes durch die Integration über den unendlichen Raum:

$$W = \int \frac{dv}{8\pi} \left\{ \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2 \right\}. \tag{95}$$

Infolge der über den Anfangszustand gemachten Annahme können wir in der Energiegleichung, ebenso wie wir es bereits in § 5 in den Impulsgleichungen taten, die Oberflächenintegrale streichen. Rücken wir nämlich die Begrenzungsfläche so weit fort, daß sie während des ganzen betrachteten Vorganges nicht von dem Felde erreicht wird, so findet eine Strahlung durch die Begrenzungsfläche hindurch nicht statt, und es wird (vgl. § 4)

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dA}{dt}. \tag{95a}$$

Hier bezeichnet $\frac{dA}{dt}$ die Arbeitsleistung der „inneren" elektromagnetischen Kräfte $\mathfrak{F}$, die vom Felde des Elektrons selbst herrühren; es gilt

$$\frac{dA}{dt} = \int dv \varrho \, (\mathfrak{v}\mathfrak{F}) = \left(\mathfrak{v}_0, \int dv \varrho \mathfrak{F}\right) + \left(\mathfrak{u}, \int dv \varrho \, [\mathfrak{r}\mathfrak{F}]\right),$$

wie aus der kinematischen Grundgleichung (VII) im Verein mit der Regel (γ) der Formelzusammenstellung in Bd. I, S. 437, folgt. Mit Rücksicht auf die dynamischen Grundgleichungen (92a, b) ergibt dieses

$$\frac{dA}{dt} = -(\mathfrak{v}_0 \mathfrak{K}^a) - (\mathfrak{u} \mathfrak{N}^a). \tag{95b}$$

E s i s t d e m n a c h d i e A r b e i t d e r i n n e r e n e l e k t r o m a g n e t i s c h e n K r ä f t e e n t g e g e n g e s e t z t g l e i c h d e r A r b e i t

der äußeren elektromagnetischen Kräfte. Diese aus den Grundgleichungen unserer Dynamik des Elektrons folgende Beziehung würde nicht mehr erfüllt sein, wenn noch andere innere Kräfte, außer den elektromagnetischen, mitwirkten. Durch die Wahl der Grundhypothesen haben wir eben ausgeschlossen, daß solche Kräfte jemals Arbeit leisten. Die Relation (95b) und die aus ihr und (95a) sofort sich ergebende Energiegleichung

$$\frac{dW}{dt} = (\mathfrak{v}_0 \mathfrak{K}^a) + (\mathfrak{u} \mathfrak{N}^a), \tag{96}$$

sind für unsere rein elektromagnetisch begründete Dynamik des Elektrons wesentlich.

Kombinieren wir nun die Energiegleichung (96) mit den Impulsgleichungen (94) und (94a), indem wir die aus den letzteren sich ergebenden Werte der äußeren Kraft und Drehkraft in die letztere einführen, so erhalten wir

$$\frac{dW}{dt} = \left(\mathfrak{v}_0 \frac{d\mathfrak{G}}{dt}\right) + \left(\mathfrak{u} \frac{d\mathfrak{Y}}{dt}\right) + (\mathfrak{G}[\mathfrak{u}\mathfrak{v}_0]). \tag{97}$$

Diese aus der Energiegleichung und den Impulsgleichungen abgeleitete Beziehung ist von großer Wichtigkeit für die Dynamik des starren Elektrons; denn sie verknüpft in einer allgemeinen, von den Werten der äußeren Kräfte unabhängigen Weise den Impuls, den Drehimpuls und die Energie des Elektrons.

Wir wollen, ehe wir zur Behandlung spezieller Bewegungen übergehen, noch eine andere, allgemeine Beziehung ableiten, welche sich gleichfalls weiterhin als wertvoll erweisen wird. Dieselbe bezieht sich auf die Differenz der magnetischen Energie T und der elektrischen Energie U des Feldes. Diese Differenz soll die „Lagrangesche Funktion“ genannt werden.

$$L = T - U. \tag{98}$$

Wir wollen bei der Berechnung der beiden Energiearten die Relationen (28) und (29) heranziehen, welche die elektro-

magnetischen Vektoren durch die elektromagnetischen Potentiale ausdrücken. Dann wird

$$(98\text{a})\qquad T=\int\frac{dv}{8\pi}\mathfrak{H}^2=\int\frac{dv}{8\pi}(\mathfrak{H},\operatorname{curl}\mathfrak{A}),$$

$$(98\text{b})\qquad U=\int\frac{dv}{8\pi}\mathfrak{E}^2=-\int\frac{dv}{8\pi}\left(\mathfrak{E},\nabla\Phi+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right).$$

Die erhaltenen Ausdrücke sollen durch partielle Integration umgeformt werden, wobei die über die Begrenzungsfläche erstreckten Integrale ein für allemal gestrichen werden sollen. Es liegt diesem Verfahren immer die stillschweigende Voraussetzung zugrunde, daß die Grenzfläche nicht von der Störung erreicht worden ist; auf dieser Fläche herrscht dann noch der elektrostatische Anfangszustand, der zu einer früheren Zeit einmal im ganzen Raume geherrscht hat; dieses elektrostatische Feld liefert keine Beiträge zu den Oberflächenintegralen.

Aus Regel (v) der Formelzusammenstellung in I, S. 438 folgt

$$T=\int\frac{dv}{8\pi}(\mathfrak{A},\operatorname{curl}\mathfrak{H}),$$

und, nach Einführung der Feldgleichung (II),

$$(98\text{c})\qquad T=\frac{1}{2}\int dv\,(\mathfrak{i}\mathfrak{A})+\int\frac{dv}{8\pi c}\left(\mathfrak{A},\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\right).$$

Anderseits ergibt die Regel (ι) auf S. 437

$$\operatorname{div}\Phi\mathfrak{E}=\Phi\operatorname{div}\mathfrak{E}+\mathfrak{E}\nabla\Phi,$$

woraus auf Grund des Gaußschen Satzes (Regel σ) folgt

$$\int dv\,\mathfrak{E}\nabla\Phi=-\int dv\,\Phi\operatorname{div}\mathfrak{E}=-4\pi\int dv\,\varrho\,\Phi.$$

Demgemäß wird die elektrische Energie

$$(98\text{d})\qquad U=\frac{1}{2}\int dv\,\varrho\,\Phi-\int\frac{dv}{8\pi c}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right).$$

Wir wollen, zur Abkürzung, den Skalar

$$\Psi = \Phi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{A}) \tag{99}$$

einführen und das über das Volum der Elektronen erstreckte Integral

$$V = \frac{1}{2}\int dv\,\varrho\,\Psi \tag{99a}$$

die „Kräftefunktion" nennen. Nach Gleichung (10) können wir auch schreiben:

$$V = \frac{1}{2}\int dv\,\varrho\,\Phi - \frac{1}{2}\int dv\,(\mathfrak{f}\mathfrak{A}). \tag{99b}$$

Es folgt daher durch Subtraktion von (98c, d)

$$L = -V + \frac{d}{dt}\int \frac{dv}{8\pi c}(\mathfrak{E}\mathfrak{A}). \tag{100}$$

Diese wichtige Beziehung zwischen der Lagrangeschen Funktion und der Kräftefunktion gilt für ein beliebiges elektromagnetisches Feld.

§ 18. Gleichförmige Translation elektrischer Ladungen.

Wir wollen die Entwickelungen dieses Paragraphen etwas allgemeiner halten, als es für die Theorie des translatorisch bewegten Elektrons unbedingt erforderlich wäre. Wir wollen uns ein beliebiges System elektrischer Ladungen in gleichförmiger translatorischer Bewegung begriffen denken. Das System soll bereits seit so langer Zeit in dieser Bewegung begriffen sein, daß in allen betrachteten Aufpunkten die frühere, der gleichförmigen Bewegung vorangegangene Bewegung ohne Einfluß geworden ist; die Bedingungen, unter denen dieses der Fall ist, lassen sich auf Grund der allgemeinen Sätze über die Fortpflanzung der elektromagnetischen Störungen (§ 8) ohne Schwierigkeit angeben. Diese Sätze führen ebenso, wie in dem speziellen Falle der Punktladung (§ 12), auch in dem jetzt vorliegenden allgemeinen Falle zur Lösung der gestellten Aufgabe; es wäre nicht schwer, die Bestimmung der elektromagne-

tischen Potentiale auf Grund der Formeln (50) und (51) durchzuführen. Man sieht ohne weiteres ein, daß das gleichförmig bewegte System elektrischer Ladungen sein Feld einfach mitführt. In der Tat, denken wir uns ein mit den Ladungen gleichförmig mitbewegtes Bezugssystem und in diesem einen festen Punkt P, so werden die Werte der elektromagnetischen Potentiale Φ und $\mathfrak{A}$ in einem solchen Punkte von der Zeit unabhängig sein; denn welche Zeit t man auch wählt, die Bewegung, nach rückwärts verfolgt, ist stets die gleiche, und die auf den betreffenden, zur Zeit t mit P koinzidierenden Aufpunkt hin sich kontrahierende Kugel führt stets die gleichen Beiträge mit. Es ist demnach das elektromagnetische Feld des gleichförmig bewegten Systemes elektrischer Ladungen stationär, wenn es von einem mitbewegten Bezugssysteme aus beurteilt wird. Freilich gilt das nur für solche Aufpunkte, welche nicht von denjenigen elektromagnetischen Wellen erreicht werden, die vor Eintritt des stationären Bewegungszustandes entsandt wurden. Je größer die Zeit ist, welche seit dem Beginn der gleichförmigen Bewegung verstrichen ist, desto weiter wird die Wellenzone sich von den bewegten Ladungen entfernt haben, wofern nicht deren Geschwindigkeit gerade der Lichtgeschwindigkeit gleich ist. Diesen Fall schließen wir aus; wir betrachten hier ausschließlich Bewegungen mit Unterlichtgeschwindigkeit. Hier wird die mit Lichtgeschwindigkeit forteilende Wellenzone das stationäre Feld einschließen; lassen wir die Zeit, die seit Beginn der gleichförmigen Bewegung verflossen ist, beliebig wachsen, so dehnt sich das stationäre Feld mehr und mehr aus; seine Feldstärken nehmen mit dem Quadrate der Entfernung von den bewegten Ladungen ab. Seine Energie und Bewegungsgröße können daher von einer gewissen Zeit an den (im Falle der Unterlichtgeschwindigkeit endlichen) Werten der Energie und Bewegungsgröße gleichgesetzt werden, welche sich ergeben, wenn man das stationäre Feld als im ganzen Raume herrschend annimmt. Die so berechneten Werte sind allerdings nicht mit der gesamten Energie und Bewegungs-

größe des Feldes identisch; um diese zu erhalten, müßten wir noch die Energie und Bewegungsgröße der Wellenzone hinzufügen.

Bei der Berechnung der elektromagnetischen Potentiale des stationären Feldes werden wir nicht die Formeln (50) und (51) als Ausgangspunkt wählen; es ist hier bequemer, auf die Differentialgleichungen (30a, b) zurückzugehen, die sich hier erheblich vereinfachen. Da nämlich die elektromagnetischen Potentiale stationär sind in bezug auf ein mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegtes System, so ist nach Gleichung (116) des ersten Bandes (S. 113)

$$\frac{\partial' \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathfrak{v} \nabla) \Phi = 0,$$

$$\frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \nabla) \mathfrak{A} = 0.$$

Legen wir die x-Achse der Bewegungsrichtung parallel und setzen

$$\beta = \frac{|\mathfrak{v}|}{c} = \frac{\mathfrak{v}_x}{c},$$

so wird

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c\beta \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t} = -c\beta \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x},$$

und es nehmen die Differentialgleichungen (30a, b) der elektromagnetischen Potentiale die Form an:

$$(101) \qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -4\pi\varrho,$$

$$(101\text{a}) \qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2} = -4\pi\varrho\beta.$$

Die zur Bewegungsrichtung senkrechten Komponenten des elektromagnetischen Vektorpotentiales sind nach (51) gleich Null, weil

$$\mathfrak{k}_y = \mathfrak{k}_z = 0$$

war; da aber

$$\mathfrak{k}_x = \varrho \frac{\mathfrak{v}_x}{c} = \varrho\beta$$

ist, so wird

$$(101\text{b}) \qquad \mathfrak{A}_x = \beta\Phi, \quad \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}_z = 0.$$

Hieraus ergeben sich für die Komponenten der Feldstärken Beziehungen, die den in § 12 (Gleichung 67b, e) für eine gleichförmig bewegte Punktladung abgeleiteten vollkommen entsprechen. Es wird

$$(101\text{c}) \qquad \mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} = -(1-\beta^2)\frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$(101\text{d}) \qquad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$(101\text{e}) \qquad \mathfrak{H}_x = 0,$$

$$(101\text{f}) \qquad \begin{cases} \mathfrak{H}_y = \dfrac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} = \beta \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = -\beta \mathfrak{E}_z, \\[2ex] \mathfrak{H}_z = -\dfrac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} = -\beta \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = +\beta \mathfrak{E}_y. \end{cases}$$

Auch folgt für den Vektor $\mathfrak{F}$, welcher die elektromagnetische Kraft auf die mitbewegte Einheit der Ladung bestimmt, die der Gleichung (68) entsprechende Beziehung

$$(102) \qquad \mathfrak{F} = -\nabla \Psi, \quad \Psi = (1-\beta^2)\,\Phi.$$

Dabei ist Ψ, das „Konvektionspotential", identisch mit dem allgemein in Gleichung (99) des vorigen Paragraphen definierten Skalar. In dem vorliegenden Falle der gleichförmigen Bewegung hat er der partiellen Differentialgleichung zu genügen:

$$(102\text{a}) \qquad \varkappa^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -4\pi \varrho \varkappa^2,$$

wobei abkürzungsweise gesetzt ist

$$(102\text{b}) \qquad \varkappa = \sqrt{1-\beta^2}.$$

Da $\beta < 1$ angenommen wird, so ist $\varkappa$ eine reelle positive Zahlgröße.

Die einfachste, einer gleichförmig bewegten Punktladung entsprechende Lösung der Differentialgleichung (102a) haben wir bereits in § 12 kennen gelernt.

Für die der Bewegungsrichtung parallele Komponente des Vektors

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$

welcher nach Gleichung (18) die Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße bestimmt, erhalten wir aus (101f)

$$\mathfrak{g}_x = \frac{1}{4\pi c}\left\{\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y\right\} = \frac{1}{4\pi c\beta}\left\{\mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2\right\}.$$

Dabei ist nach (101e) die magnetische Energiedichte gleich

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2\right\} = \frac{c\beta}{2}\mathfrak{g}_x = \frac{1}{2}|\mathfrak{v}|\,\mathfrak{g}_x.$$

Integrieren wir über das ganze Feld, so erhalten wir

$$2T = |\mathfrak{v}|\,\mathfrak{G}_x = (\mathfrak{v}\mathfrak{G}). \tag{103}$$

Die doppelte magnetische Energie des gleichförmig bewegten Systemes elektrischer Ladungen ist gleich dem skalaren Produkte aus der Geschwindigkeit und der elektromagnetischen Bewegungsgröße.

Die durch Gleichung (99a) definierte „Kräftefunktion" der bewegten Ladungen

$$V = \frac{1}{2}\int dv\,\varrho\,\Psi \tag{104}$$

ist von großer Wichtigkeit für die Theorie der konvektiv bewegten Elektrizität. Es spielt ja das Konvektionspotential Ψ hier dieselbe Rolle, welche das elektrostatische Potential φ in der Theorie der ruhenden Elektrizität spielt. Wie der negative Gradient von φ die Kraft angibt, die auf die ruhende Einheit der Ladung wirkt, so wird in unserem gleichförmig bewegten Systeme die Kraft auf die mitbewegte Einheit der Ladung durch den negativen Gradienten von Ψ angezeigt (Gleichung 102). Wie die Abnahme der elektrostatischen Energie

$$U = \frac{1}{2}\int dv\,\varrho\,\varphi \tag{104a}$$

die Arbeit angibt, die bei einer Konfigurationsänderung ruhender Ladungen gewonnen wird, so wird die Abnahme der Kräftefunktion V die Arbeit angeben, die bei einer Änderung der Konfiguration in unserem gleichförmig bewegten Systeme elek-

trischer Ladungen zu gewinnen ist. Diese Konfigurationsänderung ist selbstverständlich unendlich langsam vorgenommen zu denken, so daß unser System in jedem Momente als ein mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gleichförmig bewegtes gelten kann. Die für unser stationäres Feld aus (100) und (98) folgende Beziehung

(104b) $$V = -L = U - T$$

gestattet folgende Deutung: Zu der elektrischen Energie U des Ladungssystemes tritt das elektrodynamische Potential $-T$ der Konvektionsströme, welches, ebenso wie bei geschlossenen Leitungsströmen (Bd. I, § 64), der negativen magnetischen Energie gleich ist. Die so erhaltene Kräftefunktion gibt die Arbeit an, welche bei einer Konfigurationsänderung der bewegten Ladungen gewonnen wird.

Es folgt übrigens aus (101e, f)

$$T = \int \frac{dv}{8\pi} \mathfrak{H}^2 = \beta^2 \int \frac{dv}{8\pi} \left\{ \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2 \right\}.$$

Hieraus ergibt sich für die Kräftefunktion der Ausdruck

(104c) $$V = -L = \int \frac{dv}{8\pi} \left\{ \mathfrak{E}_x^2 + \varkappa^2 (\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2) \right\}.$$

Für die wirkliche Berechnung eignet sich allerdings besser die Formel (104), welche die Kräftefunktion durch ein über die elektrischen Ladungen erstrecktes Integral darstellt; dieses Integral läßt sich auswerten, sobald das Konvektionspotential Ψ bekannt ist. Wir gehen jetzt dazu über, durch Integration der partiellen Differentialgleichung (102a) das Konvektionspotential zu bestimmen.

Man sieht sofort ein, daß diese Differentialgleichung in die Poissonsche Gleichung übergeht, wenn man durch die Substitution

(105) $$x = x_0 \varkappa, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

neue unabhängige Variable einführt. Wir wollen gleichzeitig setzen

(105a) $$\varrho = \frac{\varrho_0}{\varkappa}.$$

Dann ist die Differentialgleichung des Konvektionspotentiales zu schreiben

(105b) $$\nabla_0^2 \Psi = -4\pi\varrho_0\varkappa.$$

Wir wollen unser gleichförmig bewegtes System Σ vergleichen mit einem ruhenden Systeme Σ_0 von elektrischen Ladungen. Es sollen x_0, y_0, z_0, ϱ_0 Raumkoordinaten und elektrische Dichte in Σ_0 sein, d. h. es soll Σ_0 aus Σ durch eine Dilatation parallel der Bewegungsrichtung hervorgehen, durch welche alle der x-Achse parallelen Strecken im Verhältnis

$$\varkappa^{-1} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

verlängert werden; die Dichte der Elektrizität soll gemäß (105a) im Verhältnis $\varkappa$ bei dieser Dehnung verkleinert werden, so daß entsprechende Volumelemente in Σ und Σ_0 dieselbe Ladung enthalten. Das elektrostatische Potential φ_0 in Σ_0 wird der Poissonschen Gleichung zu genügen haben

(105c) $$\nabla_0^2\varphi_0 = -4\pi\varrho_0,$$

welche durch

(105d) $$\varphi_0 = \int\frac{dv_0\,\varrho_0}{r_0} = \int\frac{de_0}{r_0},$$

allgemein integriert wird. Vergleichen wir nun (105b) und (105c) und bemerken, daß die Ladungen entsprechender Volumelemente in Σ_0 und Σ die gleichen sind, so erhalten wir

(106) $$\Psi = \varkappa\varphi_0 = \varkappa\int\frac{de}{r_0} = \varkappa\int\frac{dv\,\varrho}{r_0},$$

wo

(106a) $$r_0 = \sqrt{(x_0-\xi_0)^2+(y_0-\eta_0)^2+(z_0-\zeta_0)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{\varkappa^2}+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

die Entfernung der Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ und $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ ist, welche in dem ruhenden Systeme Σ_0 dem Aufpunkte (xyz) und dem Quellpunkte $(\xi\eta\zeta)$ des bewegten Systemes Σ entsprechen. Hierdurch ist allgemein die Bestimmung des Kon-

vektionspotentiales in Σ zurückgeführt auf die Bestimmung des elektrostatischen Potentiales in Σ_0.

Das Konvektionspotential einer im Koordinatenanfange befindlichen Punktladung e wird hiernach

$$\Psi = \frac{\varkappa^2 e}{\sqrt{x^2 + \varkappa^2 (y^2 + z^2)}}, \tag{106b}$$

was vollkommen mit den Gleichungen (68) und (68a) des § 12 übereinstimmt. In Entfernungen von dem bewegten Ladungssysteme, in welchen dasselbe wie eine Punktladung wirkt, ist die Formel (106b) für das Konvektionspotential zu verwenden; hier sind die Flächen konstanten Konvektionspotentiales in Σ Heaviside-Ellipsoide, welche aus den kugelförmigen Äquipotentialflächen einer ruhenden Punktladung in Σ_0 durch die Transformation (105) entstehen.

Vergleichen wir die Komponenten der elektrostatischen Kraft

$$\mathfrak{E}_0 = -\nabla_0 \varphi_0 \quad \text{in } \Sigma_0$$

mit denen der elektromagnetischen Kraft

$$\mathfrak{F} = -\nabla \Psi \quad \text{in } \Sigma,$$

so erhalten wir gemäß (105) und (106)

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_x = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = - \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} = \mathfrak{E}_{0x}, \\ \mathfrak{F}_y = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = -\varkappa \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} = \varkappa \mathfrak{E}_{0y}, \\ \mathfrak{F}_z = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial z} = -\varkappa \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial z_0} = \varkappa \mathfrak{E}_{0z}. \end{cases} \tag{106c}$$

Es greifen demnach in zwei einander entsprechenden Ladungen des bewegten Systemes Σ und des ruhenden Systemes Σ_0 Kräfte an, die bezüglich der Komponenten parallel der Bewegungsrichtung einander gleich sind, während die zur Bewegungsrichtung senkrechten Komponenten in Σ im Verhältnis $\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}$ kleiner sind, als in Σ_0.

Hat man für ein ruhendes System Σ_0 das elektrostatische Problem gelöst, d. h. die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität auf einem Leitersystem ermittelt, so kann sofort aus dieser Lösung die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität in dem gleichförmig bewegten Systeme Σ angegeben werden, welches aus Σ_0 durch eine Kontraktion parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis $\varkappa$ entsteht. Im Innern der Leiter in Σ_0 ist das elektrostatische Potential konstant, die Feldstärke $\mathfrak{E}_0$ gleich Null; dementsprechend ist in Σ das Konvektionspotential konstant und die elektromagnetische Kraft $\mathfrak{F}$ gleich Null. Wie die Gleichgewichtsverteilung in Σ_0, dem Satze von W. Thomson gemäß (vgl. I, § 44), durch ein Minimum der elektrostatischen Energie U_0 ausgezeichnet ist, so besitzt die Verteilung der Elektrizität auf den Leitern des bewegten Sytemes Σ die Eigenschaft, die Kräftefunktion

$$V = \frac{1}{2}\int dv\,\varrho\,\Psi = \frac{1}{2}\int dv_0\,\varrho_0\,\varkappa\,\varphi_0 = \varkappa U_0 \tag{106d}$$

zu einem Minimum zu machen.

Wir denken uns in Σ_0 die Ladung e mit gleichförmiger räumlicher Dichte verteilt über eine von zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzte Schicht. Das elektrostatische Potential nimmt in dem Grenzfalle einer sehr dünnen Schicht im Innern des Ellipsoides den konstanten Wert an[1]):

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\,e\int_0^\infty \frac{ds}{D}, \tag{107}$$

wo abkürzungsweise

$$D = \sqrt{(a_0^2 + s)(b_0^2 + s)(c_0^2 + s)} \tag{107a}$$

gesetzt ist. Die entsprechende, im Grenzfalle flächenhafte Verteilung der Elektrizität ist, eben weil sie im Innern des Ellipsoides ein konstantes elektrostatisches Potential ergibt,

1) Vgl. Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik. I, § 108, S. 259.

diejenige, welche sich auf einem leitenden ruhenden Ellipsoide von den Halbachsen a_0, b_0, c_0 wirklich herstellt.

Durch gleichförmige Kontraktion im Verhältnis $\varkappa$ parallel irgendeiner Geraden entsteht nun aus diesem Ellipsoide wiederum ein Ellipsoid von den Halbachsen a, b, c. Wird dieses parallel jener Geraden gleichförmig bewegt mit einer dem Werte von $\varkappa$ entsprechenden Geschwindigkeit, so ordnet es sich eben dem ruhenden Ellipsoide $\Sigma_0(a_0, b_0, c_0)$ als bewegtes $\Sigma(a, b, c)$ zu; auf ihm ist das Konvektionspotential $\Psi = \varkappa\varphi_0$ konstant. Da nun die Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität auf einem bewegten Leiter dadurch gekennzeichnet ist, daß im Innern des Leiters der Vektor $\mathfrak{F}$ verschwindet, d. h. das Konvektionspotential konstant ist, so erhalten wir durch Kontraktion des ruhenden leitenden Ellipsoides Σ_0 ein bewegtes leitendes Ellipsoid Σ, auf dem das konvektive Gleichgewicht der Elektrizität sich hergestellt hat. Beachten wir nun, daß die Elektrizitätsverteilung in Σ_0 sich als Grenzfall einer räumlichen gleichförmigen Verteilung zwischen zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden auffassen läßt und daß durch die vorgenommene Kontraktion diese Ellipsoide wieder in ähnliche, konzentrische und ähnlich liegende Ellipsoide übergehen, so erkennen wir folgendes: Die erhaltene Elektrizitätsverteilung auf dem Ellipsoide $\Sigma(a, b, c)$ wäre auch dann im Gleichgewichte, wenn das Ellipsoid ruhte. Die Elektrizitätsverteilung auf einem leitenden Ellipsoide wird durch gleichförmige Bewegung desselben nicht beeinflußt.[1])

Auf unserem kugelförmigen Elektron wurde die Flächenladung als gleichförmige angesehen, und es wurde angenommen, daß die Ladung fest an der Fläche haftet. Obgleich dieser Fall physikalisch wesentlich verschieden ist von demjenigen des geladenen Konduktors, so zeigt doch der obige Satz, daß beide Fälle in ihren Konsequenzen übereinstimmen, wenigstens für stationäre und quasistationäre Bewegungen; denn es bleibt ja auch auf

1) W. B. Morton, Phil. Mag. 41, S. 488. 1896.

dem bewegten leitenden Ellipsoide die Elektrizitätsverteilung, obwohl sie einer Änderung fähig wäre, im Falle des konvektiven Gleichgewichtes die gleiche, wie auf dem ruhenden. So erklärt es sich, daß die Untersuchungen von W. B. Morton und G. F. C. Searle[1]) über das Feld und die Feldenergie gleichförmig bewegter ellipsoidischer Leiter für die Dynamik des Elektrons sich haben verwerten lassen, obwohl sie von wesentlich anderen Grundhypothesen ausgehen.

Durch (107) und (106) ist das Konvektionspotential einer bewegten ellipsoidischen Flächenladung bestimmt. Wie die Bewegungsrichtung auch gegen die Hauptachsen ($2a$, $2b$, $2c$) orientiert sein mag, die Streckung (105) ergibt stets wiederum ein Ellipsoid, durch dessen Hauptachsen ($2a_0$, $2b_0$, $2c_0$) sich das elektrostatische Potential φ_0 gemäß (107) berechnet. Die elektrostatische Energie dieses flächenhaft geladenen Ellipsoides ist

$$U_0 = \frac{1}{2}\varphi_0 e = \frac{e^2}{4}\int_0^\infty \frac{ds}{D}; \tag{107b}$$

aus ihr bestimmt sich nach (106d) die Kräftefunktion des bewegten Ellipsoides.

Wir wollen dem Falle der Flächenladung den Fall gleichförmiger Volumladung eines bewegten Ellipsoides gegenüberstellen. Sind die Halbachsen a, b, c dieses Ellipsoides dieselben, wie die des soeben betrachteten, und ist die Orientierung der Achsen gegen die Bewegungsrichtung dieselbe, so sind auch die Halbachsen a_0, b_0, c_0 des beim Übergang zum gestreckten Systeme Σ_0 entstehenden Ellipsoides die gleichen wie dort. Es wird hier das elektrostatische Potential in Σ_0 für das Innere des Ellipsoides[2])

$$\varphi_0 = \frac{3}{4} e \int_0^\infty \frac{ds}{D}\left(1 - \frac{x_0^2}{a_0^2+s} - \frac{y_0^2}{b_0^2+s} - \frac{z_0^2}{c_0^2+s}\right), \tag{107c}$$

1) G. F. C. Searle, Phil. Trans. A. 187 (1896), S. 675. Phil. Mag. 44, S. 329. 1897.

2) Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen d. math. Physik. I, § 107, S. 256.

und somit die elektrostatische Energie der Volumladung

$$U_0^* = \frac{1}{2}\int dv_0\,\varrho_0\,\varphi_0$$

$$= \frac{3}{8}e\int_0^\infty \frac{ds}{D}\int dv_0\,\varrho_0\left(1 - \frac{x_0^2}{a_0^2+s} - \frac{y_0^2}{b_0^2+s} - \frac{z_0^2}{c_0^2+s}\right).$$

Die Integrationen über das Volumen des Ellipsoides lassen sich leicht ausführen. Man findet

$$\text{(107d)} \qquad U_0^* = \frac{3}{8}e^2\int_0^\infty \frac{ds}{D}\left\{1 - \frac{1}{5}\left(\frac{a_0^2}{a_0^2+s} + \frac{b_0^2}{b_0^2+s} + \frac{c_0^2}{c_0^2+s}\right)\right\}.$$

Wir wollen die elektrostatische Energie (107d) des gleichförmig über sein Volumen geladenen Ellipsoides vergleichen mit derjenigen des flächenhaft geladenen (107b). Wir können die letztere auffassen als Funktion der Größen a_0^2, b_0^2, c_0^2, und zwar als homogene Funktion vom Grade $\left(-\frac{1}{2}\right)$. In der Tat, erinnern wir uns der Bedeutung der Größe D, die in (107a) angegeben war, und setzen statt a_0^2, b_0^2, c_0^2 die α-fachen Werte, so geht durch die Substitution $s = s'\alpha$ die rechte Seite von (107b) über in ein ganz gleiches, nach s' genommenes Integral zwischen denselben Grenzen, multipliziert mit $\alpha^{-\frac{1}{2}}$. Nach einem bekannten Satze von Euler ist demnach

$$\text{(107e)} \qquad a_0^2\frac{\partial U_0}{\partial a_0^2} + b_0^2\frac{\partial U_0}{\partial b_0^2} + c_0^2\frac{\partial U_0}{\partial c_0^2} = -\frac{1}{2}U_0.$$

Was nun die elektrostatische Energie der Volumladung (107d) betrifft, so können wir schreiben

$$U_0^* = \frac{3}{2}\left\{U_0 + \frac{2}{5}\left(a_0^2\frac{\partial U_0}{\partial a_0^2} + b_0^2\frac{\partial U_0}{\partial b_0^2} + c_0^2\frac{\partial U_0}{\partial c_0^2}\right)\right\},$$

was nach (107e) ergibt

$$\text{(107f)} \qquad U_0^* = \frac{6}{5}U_0.$$

Von der elektrostatischen Energie in Σ_0 auf Grund von (106d) sogleich zur Kräftefunktion in Σ übergehend, erhalten wir

$$\text{(108)} \qquad V^* = \frac{6}{5}V.$$

Es verhalten sich die Kräftefunktionen zweier Ellipsoide derselben Form, Ladung, Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit, von denen das erste über sein Volumen gleichförmig geladen ist, während im zweiten die Ladungsverteilung der Flächenladung des leitenden Ellipsoides entspricht (d. h. als Grenzfall einer gleichförmigen räumlichen Verteilung in einer, von zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzten Schicht anzusehen ist), wie 6 : 5. Dieser Satz führt den Fall der Volumladung auf denjenigen der Flächenladung zurück, so daß wir uns weiterhin nur mit dem letzteren zu beschäftigen brauchen.

§ 19. Bewegungsgröße und Energie des gleichförmig bewegten Elektrons.

Wir betrachten ein ellipsoidisches Elektron in gleichförmiger geradliniger Bewegung; ist genügend lange Zeit seit dem Eintritt dieser Bewegung verflossen, und ist die Geschwindigkeit der Translation kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, so wird die gesamte Energie und Bewegungsgröße des Feldes konstant sein. Sie wird sich zusammensetzen aus der Energie und Bewegungsgröße der vor Eintritt der gleichförmigen Bewegung entsandten Wellen und der vom Elektron mitgeführten Energie und Bewegungsgröße. Die weitere Bewegung des Elektrons ist ausschließlich durch die mitgeführte Bewegungsgröße und Energie bestimmt.

Da der gesamte elektromagnetische Impuls und der auf den Mittelpunkt des Elektrons bezogene Drehimpuls des mitgeführten Feldes konstant sind, so ergeben die Impulssätze (94, 94a):

(109) $$\mathfrak{K}^a = 0,$$

(109a) $$\mathfrak{N}^a = [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{G}].$$

Es bedarf demnach keiner äußeren Kraft, um die gleichförmige Bewegung des ellipsoidischen Elektrons aufrechtzuerhalten, wohl aber im allgemeinen einer

äußeren Drehkraft. Eine äußere Drehkraft ist stets erforderlich, wenn der Impulsvektor $\mathfrak{G}$ *nicht der Bewegungsrichtung parallel weist.* Man überzeugt sich leicht davon, daß dieses eine Konsequenz der allgemeinen Impulssätze des § 5 ist. Es war ja die elektromagnetische Bewegungsgröße über den Äther verteilt zu denken und dementsprechend das Impulsmoment auf einen im Raume festen Punkt zu beziehen. Eine äußere Drehkraft ist dann erforderlich, wenn das auf den absolut ruhenden Momentenpunkt bezogene Moment der elektromagnetischen Bewegungsgröße sich ändert; das ist aber hier der Fall; denn es führt das gleichförmig bewegte Elektron sein Feld und die über dieses Feld verteilte Bewegungsgröße einfach mit sich, es ändert sich also der von dem ruhenden Bezugspunkte aus gezogene Hebelarm, an dem das betreffende Quantum von Bewegungsgröße anzubringen ist, und zwar für das ganze Feld mit derselben Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0$. Die zeitliche Änderung des gesamten auf den ruhenden Momentenpunkt bezogenen Impulsmomentes ist demnach gleich dem äußeren Produkte aus $\mathfrak{v}$ und dem gesamten Impulse des mitgeführten Feldes, wie Gleichung (109a) behauptet. Was aber die Bewegungsgröße der entsandten Wellen anbelangt, so ist diese, wie wir gezeigt haben, der Strahlrichtung, d. h. dem vom Orte des Entsendens aus gezogenen Radiusvektor parallel. Ihr Moment in bezug auf diesen im Raume festen Punkt ist dauernd gleich Null, so daß die Bewegungsgröße der Wellen in (109a) nicht eingeht.

Es ist aus Symmetriegründen ersichtlich und wird durch genauere Überlegung bestätigt, daß der Impuls $\mathfrak{G}$ des mitgeführten Feldes parallel der Bewegungsrichtung weist, wenn ein ellipsoidisches Elektron einer der drei Hauptachsen parallel bewegt wird. Geschieht hingegen die Bewegung des Ellipsoides in einer anderen Richtung, so bedarf es einer äußeren Drehkraft, um die gleichförmige, rotationslose Bewegung aufrechtzuerhalten. *Eine Translation des ellipsoidischen Elektrons in einer zu den Hauptachsen schiefen Richtung erfüllt also nicht das erste Axiom der Newtonschen*

Mechanik; sie kann nicht ohne Einwirkung äußerer Kräfte vor sich gehen. Was aber die Bewegung parallel den Hauptachsen anbelangt, so sind stabile und labile Bewegungen zu unterscheiden. Eine translatorische Bewegung wird als stabil zu bezeichnen sein, wenn beim Herausdrehen der Hauptachse aus der Bewegungsrichtung eine innere Drehkraft erweckt wird, welche die Hauptachse wieder in die Bewegungsrichtung einzustellen strebt, d. h. wenn die durch (109a) angegebene äußere Drehkraft $\mathfrak{N}^a$, welche jener inneren Drehkraft das Gleichgewicht hält, das Ellipsoid aus der Bewegungsrichtung herauszudrehen sucht. Ist hingegen eine äußere Drehkraft erforderlich, welche die betreffende Hauptachse in die Bewegungsrichtung einzustellen sucht, d. h. streben die durch eine kleine Drehung erweckten inneren Drehkräfte den Winkel zwischen der Achse und der Bewegungsrichtung zu vergrößern, so wird die betreffende Bewegung eine labile zu nennen sein. Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, gibt die Kräftefunktion V des Elektrons durch ihre Abnahme die bei konstant gehaltener Geschwindigkeit bei einer Konfigurationsänderung zu gewinnende Arbeit an. Dementsprechend werden sich die stabilen und labilen Translationsbewegungen dadurch unterscheiden lassen, daß erstere einem Minimum, letztere einem Maximum der Kräftefunktion V bei gegebener Geschwindigkeit entsprechen, gerade so, wie in der Mechanik die stabilen und labilen Gleichgewichte durch ein Minimum bzw. ein Maximum der potentiellen Energie sich auszeichnen (vgl. I § 11). Die genauere Untersuchung hat dieses bestätigt[1]); sie hat ferner ergeben, daß die Bewegung des Ellipsoides parallel der größten der drei Achsen einem Minimum der Kräftefunktion V (oder nach (104b) einem Maximum der Lagrangeschen Funktion) entspricht und demnach stabil ist. Die Bewegung parallel der kleinsten der drei Achsen hingegen, welche einem Maximum von V entspricht, ist instabil. Wir können also nicht annehmen,

1) M. Abraham l. c. Ann. d. Phys. 10. S. 174. 1903.

daß die in den Kathodenstrahlen und in den Radiumstrahlen bewegten Elektronen etwa abgeplattete Rotationsellipsoide sind, welche sich parallel der Rotationsachse bewegen, wenigstens dann nicht, wenn wir die Ladung starr an dem Volumen oder an der Oberfläche des Ellipsoides haften lassen; der kleinste Anstoß würde genügen, um ein solches Ellipsoid zum Umschlagen zu bringen. Was schließlich die Bewegung parallel der mittleren Achse des dreiachsigen Ellipsoides anbelangt, so ist dieselbe offenbar stabil gegenüber solchen Drehungen, welche die kleinste Hauptachse, aber labil gegenüber solchen, welche die größte Hauptachse der Bewegungsrichtung parallel zu stellen suchen. Auch eine Bewegung parallel dieser mittleren Achse wird labil zu nennen sein. Wenn man unsere einfachste Voraussetzung, nämlich die eines kugelförmigen Elektrons, aufzugeben und zu der komplizierteren Annahme einer ellipsoidischen Form überzugehen wünscht, so wird man in den Kathodenstrahlen und in den Radiumstrahlen diese ellipsoidischen Elektronen nur ihrer größten Achse parallel bewegt annehmen dürfen, wofern man an den Grundhypothesen (VI, VIa und VII) festhält.

Unser kugelförmiges Elektron ist offenbar bezüglich einer Drehung in indifferentem Gleichgewicht. Der Impuls weist stets parallel der Bewegungsrichtung und es ist keine äußere Drehkraft erforderlich, um die gleichförmige Translation aufrechtzuerhalten. Die gleichförmige Translationsbewegung unseres kugelförmigen Elektrons mit Unterlichtgeschwindigkeit ist demnach eine kräftefreie Bewegung. Es gilt für ein solches Elektron, sei es, daß die Ladung gleichförmig über die Oberfläche oder gleichförmig über das Volumen verteilt ist, das erste Axiom der Newtonschen Mechanik.

Wir gehen nunmehr zur Berechnung der elektromagnetischen Bewegungsgröße und Energie über, welche das Elektron bei seiner gleichförmigen Translation mit sich führt. Die Bestimmung der Kräftefunktion V bzw. der Lagrangeschen Funktion L ist ja durch (106d) zurückgeführt auf die Be-

stimmung der elektrostatischen Energie U_0 des im Verhältnis $\varkappa^{-1}$ seiner Bewegungsrichtung parallel gestreckten Elektrons:

$$V = -L = \varkappa U_0. \tag{110}$$

Aus der Lagrangeschen Funktion leiten wir nun sowohl die Bewegungsgröße wie die Energie unseres kugelförmigen Elektrons ab. Wir gehen dabei aus von der Formel (104c):

$$L = -\int \frac{dv}{8\pi} \left\{ \mathfrak{E}_x^2 + (1 - \beta^2)(\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2) \right\}. \tag{110a}$$

Dieselbe nach β differenzierend, erhalten wir

$$\frac{dL}{d\beta} = \beta \int \frac{dv}{4\pi} \left\{ \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2 \right\} - \int \frac{dv}{4\pi} \left\{ \mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \beta} + \varkappa^2 \left(\mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial \beta} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \beta} \right) \right\}. \tag{110b}$$

Wir betrachten zuerst das zweite der hier auftretenden Integrale; die partielle Differentiation nach β bezieht sich auf das Feld, welches in einem gegebenen Punkte des stationären vom Elektron mitgeführten Feldes herrscht, d. h. es sind die Koordinaten (x, y, z) im bewegten Systeme bei der Differentiation nach β konstant zu halten. Nach (101c, d) und (102) können wir dasselbe schreiben

$$\int \frac{dv}{4\pi} \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta} \right) = -\int \frac{dv}{4\pi} \left(\nabla \Psi, \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta} \right).$$

Nach der Regel (ι) der Formelzusammenstellung in Bd. I, S. 437 ist

$$-\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta}, \nabla \Psi \right) = \Psi \operatorname{div} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta} - \operatorname{div} \Psi \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta}.$$

Der Satz von Gauß ergibt demgemäß

$$\int \frac{dv}{4\pi} \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta} \right) = \int \frac{dv}{4\pi} \Psi \frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{E}}{\partial \beta} = \int dv \, \Psi \frac{\partial \varrho}{\partial \beta},$$

wenn man beachtet, daß das Oberflächenintegral von $\Psi \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta}$ über die Begrenzungsfläche des stationären Feldes zu vernachlässigen ist, da Ψ mit der $(-1)^{\text{ten}}$, $\mathfrak{E}$ mit der $(-2)^{\text{ten}}$ Potenz der Entfernung vom Elektron abnehmen; hat, wie wir voraus-

setzen, das stationäre Feld sich bis zu Entfernungen ausgedehnt, die groß sind gegen den Radius des Elektrons, so ist dieses Oberflächenintegral in der Tat zu streichen; das geschieht mit demselben Rechte, mit dem wir die Energie und die Bewegungsgröße des mitgeführten Feldes so berechnen, als ob im ganzen Raume das stationäre Feld herrschte.

Die partielle Differentiation nach β bezieht sich auf einen Punkt, der eine feste Lage in einem mit dem Elektron bewegten Bezugssysteme hat. Haftet nun, wie angenommen wurde, die Elektrizität starr an den Volumelementen des Elektrons, so ist die Ladungsverteilung von der Geschwindigkeit unabhängig, und es wird

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \beta} = 0,$$

und daher auch

$$\text{(110c)} \qquad \int \frac{dv}{4\pi}\left(\mathfrak{F}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta}\right) = \int dv\, \Psi \frac{\partial \varrho}{\partial \beta} = 0.$$

Wir erhalten demnach aus (110b) mit Rücksicht auf (101f)

$$\text{(110d)} \qquad \frac{1}{c}\frac{dL}{d\beta} = \int \frac{dv}{4\pi c}\left\{\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y\right\} = \int dv\, \mathfrak{g}_x = \mathfrak{G}_x.$$

Es wird die der Bewegungsrichtung parallele Impulskomponente erhalten, indem man die Lagrangesche Funktion nach dem Betrage $|\mathfrak{v}| = c\beta$ der Geschwindigkeit differenziert. Speziell für unser kugelförmiges Elektron, dessen Impuls stets seiner Bewegungsrichtung parallel ist, wird

$$\text{(111)} \qquad |\mathfrak{G}| = \frac{dL}{d|\mathfrak{v}|}.$$

Die Gültigkeit dieser bedeutungsvollen Beziehung fußt wesentlich auf der kinematischen Grundhypothese (VII), welche aussagt, daß die Elektrizität an den Volumelementen des starren Elektrons haftet. Würden wir hingegen eine Formänderung des Elektrons zulassen und annehmen, daß mit wachsender Geschwindigkeit die Form des Elektrons, d. h. die Ladungsverteilung im be-

wegten Systeme sich änderte, so wäre ϱ als Funktion von β anzusehen; alsdann würde die Relation (110c) nicht mehr gelten, es würde das zweite Glied auf der rechten Seite von (110b) nicht mehr fortfallen. Es beruht mithin die Gleichung (110d) auf unserer kinematischen Grundhypothese (VII); diese Gleichung geht in (111) über, wenn der Impuls der Bewegungsrichtung parallel weist, d. h. wenn keine äußere Drehkraft zur Aufrechterhaltung der gleichförmigen Translation erforderlich ist. Für unser kugelförmiges Elektron ist diese Bedingung, wie wir gesehen haben, erfüllt.

Die Lagrangesche Funktion ist definiert als Differenz der magnetischen Energie T und der elektrischen Energie U. Es ist mithin die gesamte elektromagnetische Energie des Elektrons

$$W = 2T - L.$$

Führen wir hier für $2T$ den allgemeinen, im vorigen Paragraphen erhaltenen Ausdruck (103) ein, so erhalten wir

$$W = |\mathfrak{v}| \mathfrak{G}_x - L$$

oder, mit Rücksicht auf (110d)

$$W = |\mathfrak{v}| \frac{dL}{d|\mathfrak{v}|} - L. \tag{111a}$$

Es drückt sich demnach auch die Energie eines der kinematischen Grundgleichung (VII) gehorchenden Elektrons allgemein durch die Lagrangesche Funktion aus. Wir merken noch die aus (111) und (111a) folgende Beziehung an

$$\frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{d^2L}{d|\mathfrak{v}|^2}, \tag{111b}$$

deren Bedeutung wir im nächsten Paragraphen erläutern werden.

Die Entwickelungen des vorigen Paragraphen gestatten es nun ohne weiteres, das Feld und die Lagrangesche Funktion eines kugelförmigen Elektrons zu ermitteln, sowohl für den Fall der gleichförmigen Flächenladung, als auch für den Fall der gleichförmigen Volumladung.

Durch die Transformation (105) wird die bewegte Kugel vom Radius a abgebildet auf ein ruhendes Ellipsoid von den Halbachsen

(112) $$a_0 = \frac{a}{\varkappa}, \quad b_0 = c_0 = a;$$

das ist ein gestrecktes Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse der Bewegungsrichtung des Elektrons entspricht. Das elektrostatische Potential dieses Ellipsoides würde sich für den Fall der Flächenladung aus (107), für den Fall der Volumladung aus (107c) durch Einführung der Halbachsen (112) auswerten lassen. Durch (106) wäre dann das Konvektionspotential des bewegten Elektrons bestimmt als

(112a) $$\Psi = \varkappa \varphi_0,$$

und durch (102) bzw. (101b) die elektromagnetischen Potentiale

(112b) $$\Phi = \varkappa^{-2} \Psi = \varkappa^{-1} \varphi_0$$

und

(112c) $$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{v}}{c} \Phi = \frac{\mathfrak{v}}{c\varkappa} \varphi_0.$$

Anstatt φ_0 aus (107) bzw. (107c) zu berechnen, ziehen wir es vor, zunächst den Fall der Flächenladung zu erledigen, indem wir uns auf die im ersten Bande dieses Werkes (§ 36) gegebene Ableitung des elektrostatischen Potentiales eines gestrecken Rotationsellipsoides beziehen. Die Verteilung der Ladung auf dem leitenden Ellipsoide ist ja als Grenzfall einer gleichförmigen räumlichen Verteilung zwischen zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden anzusehen, wie wir im vorigen Paragraphen bemerkten. Diese Verteilung ist gerade die hier in Betracht kommende, nämlich diejenige, die durch Streckung des mit einer gleichförmigen Flächenbelegung versehenen Elektrons entsteht. Das elektrostatische Potential des leitenden Ellipsoides ist in Bd. I Gleichung (132) auf S. 136 angegeben; dort war die Rotationsachse der z-Achse parallel; es bezeichnete c den halben Abstand der Brennpunkte, der hier gleich

$$\sqrt{a_0^2 - b_0^2} = a\sqrt{\frac{1-\varkappa^2}{\varkappa^2}} = a\frac{\beta}{\varkappa}$$

zu setzen ist; es stellten ferner r_1 und r_2 die Abstände eines Aufpunktes von den Brennpunkten dar, die in der jetzigen Schreibweise sind

$$r_1 = \sqrt{\left(x_0 + a\frac{\beta}{\varkappa}\right)^2 + y_0^2 + z_0^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x_0 - a\frac{\beta}{\varkappa}\right)^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Demgemäß wird

$$\text{(112d)} \qquad \varphi_0 = \frac{e\varkappa}{2\beta a} \ln\left\{\frac{x_0 + a\frac{\beta}{\varkappa} + r_1}{x_0 - a\frac{\beta}{\varkappa} + r_2}\right\}$$

im äußeren Felde das elektrostatische Potential des gestreckten Rotationsellipsoides. Zum bewegten Elektron zurückkehrend, erhalten wir aus (112b, c) die elektromagnetischen Potentiale des mitgeführten äußeren Feldes

$$\text{(112e)} \qquad \Phi = \frac{e}{2\beta a} \ln\left\{\frac{x + a\beta + \varkappa r_1}{x - a\beta + \varkappa r_2}\right\},$$

$$\text{(112f)} \qquad \mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{2\beta a c} \ln\left\{\frac{x + a\beta + \varkappa r_1}{x - a\beta + \varkappa r_2}\right\},$$

wobei nach (105)

$$\text{(112g)} \qquad \begin{cases} \varkappa r_1 = \sqrt{(x + a\beta)^2 + \varkappa^2(y^2 + z^2)} \\ \varkappa r_2 = \sqrt{(x - a\beta)^2 + \varkappa^2(y^2 + z^2)} \end{cases}$$

zu setzen ist. Aus diesen Werten der elektromagnetischen Potentiale ist das äußere Feld des Elektrons nach den Formeln (101c, d, e, f) abzuleiten. Das Konvektionspotential, dessen negativer Gradient die auf die Einheit der mitbewegten Ladung ausgeübte Kraft bestimmt, ist außerhalb des Elektrons, nach (112a, d)

$$\text{(112h)} \qquad \Psi = \frac{e\varkappa^2}{2\beta a} \ln\left\{\frac{x + a\beta + \varkappa r_1}{x - a\beta + \varkappa r_2}\right\}.$$

Die Äquipotentialflächen des ruhenden, gestreckten Rotationsellipsoides sind konfokale Ellipsoide, die sich mit wachsender Entfernung mehr und mehr der Kugelgestalt nähern. Im

äußeren Felde des bewegten Elektrons sind die Flächen konstanten Konvektionspotentiales eine Schar von Ellipsoiden, welche aus jenen durch eine Kontraktion parallel der x-Achse entstehen; mit wachsender Entfernung vom Elektron nähern sie sich asymptotisch Heaviside-Ellipsoiden.

Wie die Oberfläche des leitenden Rotationsellipsoides eine Äquipotentialfläche ist, so ist die Oberfläche des Elektrons eine Fläche konstanten Konvektionspotentiales. Nach Formel (132b) in Bd. I (S. 137) ist das elektrostatische Potential des leitenden Ellipsoides

$$\text{(112i)} \qquad \varphi_0 = \frac{e}{\sqrt{a_0^2 - b_0^2}} \ln\left(\frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 - b_0^2}}{b_0}\right).$$

Nach (112, 112a) wird demnach der an der Oberfläche des Elektrons herrschende Wert des Konvektionspotentiales

$$\text{(112k)} \qquad \Psi = \frac{e\varkappa^2}{a\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{\varkappa}\right) = \frac{e}{a}\,\frac{1-\beta^2}{2\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Im Innern des flächenhaft geladenen Elektrons sind sowohl das Konvektionspotential wie die elektromagnetischen Potentiale konstant; demgemäß besteht im Innern des gleichförmig bewegten Elektrons, in dem hier behandelten Falle der Flächenladung, überhaupt kein elektromagnetisches Feld.

Aus (104) bzw. (104b) folgt jetzt ohne weiteres der Wert der Kräftefunktion bzw. der Lagrangeschen Funktion des Elektrons

$$\text{(113)} \qquad V = -L = \frac{1}{2} e \Psi = \frac{e^2}{2a}\,\frac{1-\beta^2}{2\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

für den Fall der Flächenladung.

Aus (111) folgt als Betrag des Impulses

$$\text{(113a)} \qquad |\mathfrak{G}| = \frac{dL}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{e^2}{2ac\beta}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right) \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\},$$

und aus (111a) die Energie des Elektrons

$$\text{(113b)} \qquad W = |\mathfrak{v}| \frac{dL}{d|\mathfrak{v}|} - L = \frac{e^2}{2a}\left\{\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\}.$$

Da die Kräftefunktion gleich der Differenz der elektrischen Energie U und der magnetischen T ist, so erhalten wir durch Addition und Subtraktion von (113b) und (113)

$$U = \frac{1}{2}\left(W + V\right) = \frac{e^2}{4a}\left\{\left(\frac{3-\beta^2}{2\beta}\right)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\}, \tag{113c}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(W - V\right) = \frac{e^2}{4a}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\}. \tag{113d}$$

Die letztere Formel hätte natürlich auch aus (113a) abgeleitet werden können, da ja nach (103) die doppelte magnetische Energie dem Produkte aus Geschwindigkeit und Impuls gleich ist. Entwickelt man die beiden letzten Ausdrücke in Reihen, die nach Potenzen von β^2 fortschreiten, und vernachlässigt Größen der Ordnung β^4, so wird

$$U = U_0 = \frac{e^2}{2a}, \tag{113e}$$

$$T = \frac{e^2}{3a}\cdot\beta^2. \tag{113f}$$

Für Bewegungen des Elektrons, deren Geschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, ist die elektrische Energie von der Geschwindigkeit unabhängig, während die magnetische Energie dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Erstere ist mithin der potentiellen, letztere der kinetischen Energie der gewöhnlichen Mechanik zu vergleichen. Diese Analogie ist nicht auf geringe Geschwindigkeiten beschränkt; die Ableitung der Gesamtenergie und des Impulses aus der als Differenz der beiden Energiearten definierten Lagrangeschen Funktion, die für beliebige Geschwindigkeit galt, erinnert an Beziehungen, die aus der analytischen Mechanik bekannt sind; wir kommen hierauf im nächsten Paragraphen zurück.

Haben wir es nicht mit dem Falle der Flächenladung, sondern mit dem Falle der Volumladung des kugelförmigen Elektrons zu tun, so können wir die Lagrangesche Funktion, die Energie und den Impuls sofort angeben, auf Grund des Satzes, den wir am Schlusse des vorigen Paragraphen bewiesen haben (Gleichung 108). Im Falle der Volumladung werden die Werte der Kräftefunktion, und demnach

auch diejenigen der Energie und des Impulses, aus den im Falle der Flächenladung geltenden einfach durch Multiplikation mit dem Zahlenfaktor 6 : 5 abgeleitet. Mit diesem Faktor sind also die rechten Seiten der Gleichungen (113) bis (113f) beim Übergange zur Volumladung zu multiplizieren.

Aus dem am Eingange dieses Paragraphen und in dem des vorigen Gesagten geht ohne weiteres hervor, daß diese Formeln nur für den Fall der Unterlichtgeschwindigkeit die Energie und die Bewegungsgröße des mitgeführten Feldes bestimmen.

Die magnetische Energie einer langsam bewegten, flächenhaft geladenen Kugel wurde zuerst von O. Heaviside richtig angegeben (1889). Die Gesamtenergie der leitenden Kugel wurde von G. F. C. Searle ermittelt (1897). Die Bewegungsgröße des kugelförmigen Elektrons und die Beziehungen zwischen Lagrangescher Funktion, Energie und Bewegungsgröße wurden vom Verfasser dieses Werkes gefunden (1902), der auch den Fall der Volumladung in der hier wiedergegebenen Weise erledigte.

§ 20. Die elektromagnetische Masse.

Wir haben im letzten Paragraphen bewiesen, daß das Elektron, wenn äußere Kräfte nicht wirken, in seiner gleichförmigen rein translatorischen Bewegung verharrt, wofern seine Geschwindigkeit kleiner ist, als die Lichtgeschwindigkeit. Diese Folgerung aus den angenommenen Grundhypothesen ist in Übereinstimmung mit den bei Kathodenstrahlen und Radiumstrahlen gewonnenen experimentellen Ergebnissen; werden die Strahlen durch kein äußeres Feld beeinflußt, so erfolgt ihre Fortpflanzung geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.

Wie das erste, so hat auch das zweite Axiom der Mechanik Newtons sich experimentell in gewissem Sinne bestätigt. Die träge Masse der Strahlteilchen ist zwar nicht eine unabänderliche, wie die Masse der gewöhnlichen Mechanik. Sie ist nur

bei langsamer Bewegung konstant; bei den β-Strahlen des Radiums hängt sie von der Geschwindigkeit der Elektronen ab. Immerhin hat sich in dem Bereiche, auf welches sich die Experimente beziehen, die Masse insofern als konstant erwiesen, als sich der Betrag der transversalen Beschleunigung bei gegebener Geschwindigkeit dem Betrage der transversalen äußeren Kraft proportional ergab. Der Dynamik des Elektrons erwächst die Aufgabe, von diesem Verhalten Rechenschaft zu geben, und, der experimentellen Forschung voranleuchtend, den Begriff der elektromagnetischen Masse präzise zu formulieren.

Um das in dem angegebenen Sinne erweiterte zweite Axiom Newtons aus den Grundgleichungen unserer Theorie zu deduzieren, müssen wir offenbar ausgehen von solchen Bewegungen, welche dem ersten Axiome Genüge leisten; diese Bedingung erfüllen die soeben behandelten rotationslosen Bewegungen des allseitig symmetrischen Elektrons. Nur dann, wenn die kräftefreie Bewegung geradlinig und gleichförmig ist, können wir erwarten, die erteilte Beschleunigung der äußeren Kraft proportional zu finden. Auch für ein kugelförmiges Elektron ist dieses Verhalten nur unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über den Betrag der Beschleunigung und der Geschwindigkeit möglich.

Wie nämlich in § 17 dargelegt wurde, ist die Aussage der dynamischen Grundgleichungen eine äußerst verwickelte. Auch bei rein translatorischen Bewegungen hängt die innere Kraft, welche das Elektron auf sich selbst ausübt, von der Geschwindigkeit und von der Beschleunigung ab, welche das Elektron während eines gewissen, dem betreffenden Zeitpunkte vorangegangenen Zeitintervalles erfahren hat. Eine Proportionalität der Kraft zur jeweiligen Beschleunigung, und eine Abhängigkeit der Masse von der jeweiligen Geschwindigkeit allein, kann daher in Strenge nicht stattfinden. Nur wenn die Beschleunigung hinreichend gering ist, wenn also die Geschwindigkeit nach Richtung und Betrag sich nur langsam ändert, wird das Verhalten des Elektrons durch eine „elektromagnetische Masse“ zu charakterisieren sein.

Wir deuteten bereits im Eingange dieses Kapitels die Analogie an, die zwischen der elektromagnetischen Masse der konvektiv bewegten Elektrizität und der Selbstinduktion eines Leitungsstromes besteht. Wie die Selbstinduktion mit der magnetischen Energie des Leitungsstromes zusammenhängt (vgl. I, § 64), so ist die elektromagnetische Masse mit der Bewegungsgröße und der Energie des mitgeführten Feldes verknüpft. Nun war aber der Gültigkeitsbereich des Begriffes der Selbstinduktion auf langsam veränderliche, oder, wie wir sagten, „quasistationäre“ Ströme beschränkt. Ein Strom wurde quasistationär genannt (vgl. I, S. 257), wenn seine Stromstärke sich nur relativ wenig änderte in der Zeit, welche die elektromagnetischen Störungen gebrauchen, um den Abstand zwischen den beiden entferntesten Punkten des Stromsystemes zu durchmessen. Nur unter dieser Bedingung konnte die magnetische Energie so berechnet werden, als ob das Feld, wie beim stationären Strome, der jeweiligen Stromstärke augenblicklich folgte. Auf solche quasistationäre Ströme allein ist die gebräuchliche Theorie des Wechselstromes anzuwenden, die im ersten Bande dieses Werkes (Abschnitt III, Kap. 2) vorgetragen wurde. Dementsprechend wird der Begriff der elektromagnetischen Masse nur auf „quasistationäre Bewegungen“ des Elektrons angewendet werden dürfen; es wird eine Bewegung dann quasistationär zu nennen sein, wenn ihre Geschwindigkeit sich nur wenig ändert in der Zeit, welche das Licht gebraucht, um über das Elektron hinwegzustreichen. Für quasistationäre Bewegungen werden wir die Bewegungsgröße und die Energie so berechnen, als ob das mitgeführte Feld der jeweiligen Geschwindigkeit entspräche, d. h. wir werden diejenigen Werte des Impulses und der Energie verwenden, die wir im vorigen Paragraphen für gleichförmige Bewegungen abgeleitet haben. Die Gültigkeitsgrenzen der Theorie der quasistationären Bewegung werden wir in einem späteren Paragraphen abstecken; wir werden sehen, daß diese Theorie alle beobachtbaren Ablenkungen und Beschleunigungen mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegter Elektronen umfaßt.

Dem Impulssatze (94) zufolge ist die zeitliche Änderung des Impulsvektors $\mathfrak{G}$ des Elektrons der äußeren elektromagnetischen Kraft $\mathfrak{K}^a$ gleich:

(114) $$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K}^a.$$

Bei quasistationärer Bewegung wird, wie bei gleichförmiger Bewegung, der Betrag des Impulses als Funktion des Betrages der Geschwindigkeit allein betrachtet, und die Richtung des Impulses, wie bei einer jeden dem ersten Axiome gehorchenden Bewegung, der Bewegungsrichtung parallel vorausgesetzt. Es liegt mithin der Vektor, welcher die zeitliche Änderung des Impulses angibt, stets in der Oskulationsebene der Bahn. Es ist zweckmäßig, ihn in zwei Vektoren zu zerlegen, von denen der erste der Bewegungsrichtung parallel ist, während der zweite nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn weist; die Richtungen, nach denen zerlegt wird, sollen durch zwei Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{N}_1$ gekennzeichnet werden, welche der Tangente bzw. der Hauptnormale der Bahn parallel sind. Nach diesen Richtungen hatten wir in Bd. I, S. 9 den Beschleunigungsvektor zerlegt. Wir können die Gleichung (8) daselbst schreiben

(114a) $$\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{t}_1 \frac{d|\mathfrak{v}|}{dt} + \mathfrak{N}_1 \cdot \frac{|\mathfrak{v}|^2}{R}.$$

Ferner lautet Gleichung (6) daselbst

(114b) $$\frac{d\mathfrak{t}_1}{ds} = \frac{\mathfrak{N}_1}{R},$$

wobei ds das Wegelement der Bahnkurve vorstellt.

In ganz entsprechender Weise, wie wir dort den Geschwindigkeitsvektor differenzierten, können wir jetzt den Vektor

(114c) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{t}_1 |\mathfrak{G}|$$

nach der Zeit differenzieren.

Es wird, mit Rücksicht auf (114b):

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \dot{\mathfrak{G}} = \mathfrak{t}_1 \frac{d|\mathfrak{G}|}{dt} + \frac{\mathfrak{N}_1}{R} \frac{ds}{dt} |\mathfrak{G}|,$$

und da man hat:

$$\frac{ds}{dt} = |\mathfrak{v}|, \quad \frac{d|\mathfrak{G}|}{dt} = \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} \frac{d|\mathfrak{v}|}{dt},$$

so wird

$$\dot{\mathfrak{G}} = \mathfrak{t}_1 \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} \frac{d|\mathfrak{v}|}{dt} + \frac{\mathfrak{N}_1}{R} |\mathfrak{G}|\,|\mathfrak{v}|. \tag{114d}$$

Diese Formel gilt für jeden Vektor, dessen Richtung zu $\mathfrak{v}$ parallel, und dessen Betrag durch den Betrag von $\mathfrak{v}$ bestimmt ist. Speziell für die zeitliche Änderung von $\mathfrak{v}$ selbst geht sie über in die Gleichung (114a).

Anderseits lautet die Bewegungsgleichung (114)

$$\dot{\mathfrak{G}} = \mathfrak{t}_1 \mathfrak{K}_s^a + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{K}_r^a, \tag{114e}$$

hier sind unter $\mathfrak{K}_s^a$ und $\mathfrak{K}_r^a$ die Komponenten der äußeren Kraft zu verstehen, welche parallel bzw. senkrecht zur Bewegungsrichtung wirken; die Ebene der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der äußeren Kraft $\mathfrak{K}^a$ bestimmt die Oskulationsebene der Bahn, wie in der Mechanik des materiellen Punktes.

Wir schreiben jetzt (114d) und (114a)

$$\dot{\mathfrak{G}} = \mathfrak{t}_1 \dot{\mathfrak{G}}_s + \mathfrak{N}_1 \dot{\mathfrak{G}}_r,$$

$$\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{t}_1 \dot{\mathfrak{v}}_s + \mathfrak{N}_1 \dot{\mathfrak{v}}_r,$$

und erhalten

$$\frac{\mathfrak{K}_s^a}{\dot{\mathfrak{v}}_s} = \frac{\dot{\mathfrak{G}}_s}{\dot{\mathfrak{v}}_s} = \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|}, \tag{114g}$$

$$\frac{\mathfrak{K}_r^a}{\dot{\mathfrak{v}}_r} = \frac{\dot{\mathfrak{G}}_r}{\dot{\mathfrak{v}}_r} = \frac{|\mathfrak{G}|}{|\mathfrak{v}|}. \tag{114h}$$

Die Quotienten aus longitudinaler Kraftkomponente und longitudinaler Beschleunigungskomponente, sowie aus transversaler Kraftkomponente und Beschleunigungskomponente, sind für quasistationäre Bewegungen beide nur Funktionen der Geschwindigkeit.

In diesem Sinne erweist sich das zweite Axiom Newtons in der Dynamik des Elektrons als gültig. Wir erhalten jetzt für die „longitudinale elektromagnetische Masse", d. h.

für den Quotienten der parallel der Bewegungsrichtung genommenen Komponenten von äußerer Kraft und Beschleunigung:

(115)
$$m_s = \frac{d\,|\mathfrak{G}|}{d\,|\mathfrak{v}|}.$$

Für die „transversale elektromagnetische Masse" hingegen, d. h. für den Quotienten der zur Bewegungsrichtung senkrechten Komponenten von äußerer Kraft und Beschleunigung folgt

(115a)
$$m_r = \frac{|\mathfrak{G}|}{|\mathfrak{v}|}.$$

Im allgemeinen ist die longitudinale Masse von der transversalen verschieden. Nur im Grenzfalle langsamer Bewegung, wo der Impuls des Elektrons seiner Geschwindigkeit proportional ist, stimmen die rechten Seiten von (115) und (115a) überein; wir wollen diesen gemeinsamen Grenzwert der longitudinalen und der transversalen Masse mit m_0 bezeichnen; für langsame Kathodenstrahlen ist es erlaubt, mit ihm so zu rechnen, wie es in § 2 geschah.

Diese Formeln, welche die Masse des Elektrons mit seiner Bewegungsgröße verknüpfen, und die vom Verfasser dieses Werkes zuerst angegeben wurden, sind unabhängig von jeder Annahme über die Form und die Ladungsverteilung des Elektrons. Sie gelten immer dann, wenn der Impulsvektor der Bewegungsrichtung parallel weist, und sein Betrag eine beliebige Funktion des Betrages der Geschwindigkeit ist. Wünscht man die Dynamik des Elektrons rein elektromagnetisch zu begründen, so hat man für $|\mathfrak{G}|$ den Betrag der elektromagnetischen Bewegungsgröße einzusetzen.

Man kann die elektromagnetische Masse auch mit der elektromagnetischen Energie des Elektrons in Verbindung bringen; die Energiegleichung (96) ergibt für rein translatorische Bewegungen

$$\frac{dW}{dt} = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{K}^a) = |\mathfrak{v}|\,\mathfrak{K}^a_s.$$

Für quasistationäre Bewegungen wird die Energie des Elektrons als Funktion des Betrages der Geschwindigkeit betrachtet; es wird daher

$$\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|}\frac{d|\mathfrak{v}|}{dt} = |\mathfrak{v}|\,\mathfrak{K}^a_s.$$

Hieraus ergibt sich die „longitudinale Masse“, die als Quotient der longitudinalen Beschleunigung und Kraft definiert wurde,

(115b) $$m_s = \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|}.$$

Diese Formel verknüpft die longitudinale Masse des Elektrons mit seiner Energie. Die transversale Masse wird selbstverständlich durch die Energiegleichung nicht bestimmt, da ja eine transversale Kraft keine Arbeit leistet.

Die aus der Energiegleichung abgeleitete Formel (115b) ist, ebenso wie die aus dem Impulssatze gewonnenen Formeln (115) und (115a), unabhängig von jeder Annahme über die Form und die Ladungsverteilung des Elektrons. Sie fußt ebenso, wie jene allein auf den Grundgleichungen (I bis V) der Elektronentheorie, aus denen ja die Energiegleichung und die Impulsgleichung als Folgerungen sich ergaben. Man könnte diese Formel, ebenso wie jene, auch dann verwenden, wenn man annähme, daß wägbare Materie mit dem Elektron verkoppelt sei; alsdann wäre in W die Energie, in $\mathfrak{G}$ die Bewegungsgröße der wägbaren Materie mit in Rechnung zu ziehen.

Dem von uns vertretenen Standpunkte getreu, werden wir indessen unter $\mathfrak{G}$ stets den elektromagnetischen Impuls, unter W die elektromagnetische Energie verstehen. Von einer rein elektromagnetisch begründeten Dynamik des Elektrons werden wir unter allen Umständen verlangen müssen, daß die beiden Formeln (115) und (115b) für die longitudinale Masse des Elektrons zu demselben Ergebnisse führen. Würde die Formel (115b) unter Annahme rein elektromagnetischer Energie, zu einem anderen Wert von m_s ergeben, als die Formel (115) unter Annahme einer rein elektromagnetischen Bewegungsgröße, so würde ein

innerer Widerspruch unseres Hypothesensystemes zutage treten. Man könnte diesen Widerspruch durch Einführung einer inneren, nicht elektromagnetischen Energie des Elektrons heben; dann würde man aber das Ziel einer rein elektromagnetischen Begründung der Mechanik der Elektronen nicht erreichen.

In unserer, auf den Grundgleichungen (VI) und (VII) fußenden Dynamik des Elektrons entsteht nun der besagte Widerspruch nicht. In der Tat, wir hatten im vorigen Paragraphen bewiesen, daß unter Voraussetzung einer unveränderlichen Verteilung der Ladung im Elektron, Impuls und Energie durch die Formeln (111) und (111a) mit der Lagrangeschen Funktion verknüpft sind. Hieraus hatten wir die Beziehung (111b) abgeleitet; diese Beziehung

$$\frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{d^2L}{d|\mathfrak{v}|^2}$$

besagt nichts anderes, als daß die Ausdrücke (115) und (115b) beide den gleichen Wert der longitudinalen Masse ergeben. Wir sehen also: Unter Annahme einer von der Geschwindigkeit unabhängigen Gestalt und Ladungsverteilung des Elektrons ergeben Impulssatz und Energiesatz den gleichen Wert der longitudinalen elektromagnetischen Masse. Hier tritt der Zusammenhang zwischen unserer kinematischen Grundhypothese (VII) und dem Gedanken einer rein elektromagnetischen Begründung der Dynamik des Elektrons, der bereits in § 16 erörtert wurde, deutlich hervor. Lassen wir diese Grundhypothese fallen und nehmen an, daß die Form des Elektrons sich mit der Geschwindigkeit ändert, so ergibt die Energiegleichung einen anderen Wert der longitudinalen elektromagnetischen Masse, als die Impulsgleichung; in diesem Falle — ein Beispiel werden wir im § 22 kennen lernen — kann von einer elektromagnetischen Begründung keine Rede mehr sein.

Jene kinematische Grundhypothese war den kinematischen Bedingungsgleichungen der analytischen Mechanik nachgebildet. Wir sind jetzt in der Lage, zu zeigen, daß unsere Grundgleichungen für die Dynamik quasistationärer Bewegungen zu

Ergebnissen führen, welche formal mit denen der Mechanik Lagranges übereinstimmen. Führen wir in die Gleichung

$$\dot{\mathfrak{G}}_s = \frac{d\,|\mathfrak{G}|}{d\,t} = \mathfrak{K}_s^a$$

die Relation (111) ein, so erhalten wir

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial\,|\mathfrak{v}|} = \mathfrak{K}_s^a. \tag{116}$$

{Wir schreiben hier partielle Differentiationszeichen, weil wir weiter unten L noch von anderen Größen, als nur von $|\mathfrak{v}|$, abhängen lassen.}

Diese Bewegungsgleichung entspricht den Lagrangeschen Gleichungen eines Systemes bewegter Massen. Wir hatten diese Gleichungen in § 15 des ersten Bandes entwickelt. Wir hatten für die Kraft, die infolge der Trägheit des verkoppelten Massensystemes an irgendeinem Antriebspunkte angreift, den Ausdruck gefunden:

$$-\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right) + \frac{\partial T}{\partial p_\lambda}.$$

Dabei wurde T, die kinetische Energie der bewegten Massen, als homogene Funktion zweiten Grades der Geschwindigkeiten q_λ der Antriebspunkte betrachtet; die Koeffizienten dieser Funktion konnten von den Parametern p_λ abhängen, welche die Lage der Antriebspunkte bestimmen, und deren Differentialquotienten nach der Zeit die q_λ sind. Nehmen wir außer der kinetischen Energie noch eine potentielle Energie U an, so ist eine innere, an dem Antriebspunkte angreifende Kraft

$$-\frac{\partial U}{\partial p_\lambda}$$

hinzuzufügen, so daß das Gleichgewicht der inneren Kräfte und der äußeren Kräfte P_λ in der Gleichung

$$-\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right) + \frac{\partial\,(T-U)}{\partial p_\lambda} + P_\lambda = 0$$

seinen Ausdruck findet. Setzen wir jetzt

$$L = T - U$$

und berücksichtigen, daß die potentielle Energie U von den Geschwindigkeiten p_λ unabhängig ist, so finden wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial L}{\partial p_\lambda} = P_\lambda. \tag{116a}$$

Aus einer solchen Lagrangeschen Gleichung läßt sich nun formal unsere Bewegungsgleichung (116) ableiten. Wählen wir als „Antriebspunkt“ etwa den Mittelpunkt des Elektrons, so ist p_λ mit dem durchlaufenen Wege s zu identifizieren, q_λ mit $\frac{ds}{dt}$, d. h. mit $|\mathfrak{v}|$, während P_λ die äußere, der Bewegungsrichtung parallele Kraftkomponente $\mathfrak{K}_s^a$ ist. Da nun in dem vorliegenden Falle die Lagrangesche Funktion von dem durchlaufenen Wege s unabhängig ist, so geht in der Tat die Lagrangesche Gleichung (116a) in (116) über.

Wählen wir anderseits für p_λ einen Parameter, welcher die Konfiguration eines gleichförmig bewegten Systemes elektrischer Ladungen bestimmt, so ergibt (116a)

$$\frac{\partial L}{\partial p_\lambda} + P_\lambda = 0. \tag{116b}$$

Auch diese Beziehung stimmt mit unserer Theorie überein. Denn wir hatten in § 18 gezeigt, daß die inneren Kräfte, die in einem gleichförmig bewegten Systeme von Ladungen wirken, sich aus einer Kräftefunktion V ableiten lassen; diese Kräftefunktion, deren Abnahme der Arbeit der inneren Kräfte gleich ist, war, nach (104b), entgegengesetzt gleich der Lagrangeschen Funktion L. Es stellt also auch in unserer Theorie (116b) die Bedingung des Gleichgewichtes der inneren und der äußeren Kräfte in einem gleichförmig bewegten Systeme elektrischer Ladungen dar.

Sucht man, mit Maxwell und Hertz, die Gesetze der Elektrodynamik aus den Prinzipien der Mechanik abzuleiten, so muß man im elektromagnetischen Felde verborgene Bewegungen träger Massen annehmen. Identifiziert man die magnetische Energie mit der kinetischen, die elektrische mit der potentiellen Energie dieser Massen, so gelangt man auf Grund der Lagrangeschen Gleichungen in der Tat zu Ergeb-

nissen, welche der Form nach mit denen unserer Theorie durchaus übereinstimmen. Es ist indessen zu bemerken, daß in der analytischen Mechanik die kinetische Energie T als Funktion zweiten Grades der Geschwindigkeiten der Antriebspunkte angenommen, die potentielle Energie U als unabhängig von der Geschwindigkeit betrachtet wird. In dem vorliegenden Falle hingegen sind T und U Funktionen der Geschwindigkeit des Elektrons, T aber keineswegs eine Funktion zweiten Grades. Wir befinden uns demnach keineswegs auf dem Boden der Annahmen, von denen die analytische Mechanik ausgeht. Dennoch haben wir, von den Grundgleichungen (I bis VII) der Mechanik der Elektronen ausgehend, wenigstens für stationäre und quasistationäre Bewegungen, die Lagrangeschen Gleichungen als gültig erwiesen. *Wir haben gezeigt, daß in unserer rein elektromagnetischen Dynamik des Elektrons die Lagrangeschen Gleichungen gelten.* Dadurch haben wir den Gültigkeitsbereich der Lagrangeschen Mechanik wesentlich erweitert, indem wir ihn von langsamen Bewegungen, bei denen T eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit ist, auf beliebig rasche Bewegungen (mit Unterlichtgeschwindigkeit) ausgedehnt haben. Wir haben ferner in der Dynamik des einzelnen Elektrons den Grundgedanken des elektromagnetischen Weltbildes (§ 16) zur Durchführung gebracht, welcher fordert, nicht die elektrische und magnetische Energie auf die potentielle und kinetische Energie der Mechanik, sondern umgekehrt die kinetische und die potentielle Energie auf die magnetische und elektrische Energie zurückzuführen.

Wir kehren nunmehr zum speziellen Falle des kugelförmigen Elektrons zurück. Wir setzen für den Betrag des Impulses den in (113a) erhaltenen Wert ein und berechnen auf Grund der Formeln (115) und (115a) die longitudinale und die transversale Masse. Wir finden

$$m_s = \frac{e^2}{2ac^2} \cdot \frac{1}{\beta^2}\left\{-\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + \frac{2}{1-\beta^2}\right\}, \tag{117}$$

$$m_r = \frac{e^2}{2ac^2} \cdot \frac{1}{\beta^2}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\}. \tag{117a}$$

Für Geschwindigkeiten, die so klein sind gegen die Lichtgeschwindigkeit, daß β^2 gegen 1 zu vernachlässigen ist, ergibt sich als gemeinsamer Grenzwert der longitudinalen und der transversalen Masse

$$m_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a c^2}. \tag{117b}$$

Die Formeln (117, 117a, b) gelten im Falle der Flächenladung.

Im Falle der Volumladung, wo die Bewegungsgröße im Verhältnis 6 : 5 vermehrt ist, sind alle drei Ausdrücke mit diesem Faktor zu multiplizieren. Es wird z. B.

$$m_0 = \frac{4}{5} \frac{e^2}{a c^2}. \tag{117c}$$

Wir fassen beide Fälle, den der Flächenladung und den der Volumladung des kugelförmigen Elektrons, zusammen, indem wir schreiben

$$\left\{\begin{aligned} m_s &= m_0 \cdot \frac{3}{4} \chi(\beta), \\ \chi(\beta) &= \frac{1}{\beta^2}\left\{-\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + \frac{2}{1-\beta^2}\right\}, \end{aligned}\right. \tag{117d}$$

$$\left\{\begin{aligned} m_r &= m_0 \cdot \frac{3}{4} \psi(\beta), \\ \psi(\beta) &= \frac{1}{\beta^2}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right) \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\}. \end{aligned}\right. \tag{117e}$$

Für m_0 ist hier im Falle der Flächenladung der Wert (117b), im Falle der Volumladung der Wert (117c) zu setzen. Für die spezifische Ladung langsamer Kathodenstrahlen folgt im ersteren Falle

$$\eta_0 = \frac{e}{c m_0} = \frac{3}{2} \frac{a c}{e},$$

woraus sich für den Radius des Elektrons ergibt

$$a = \frac{2}{3} \eta_0 \cdot \frac{e}{c}.$$

Wir führen hier den in Gleichung (2) angegebenen Wert des elektrischen Elementarquantums und den unten in Gleichung (123) angegebenen Wert der spezifischen Ladung ein:

$$\frac{e}{c} = 10^{-20}, \quad \eta_0 = 1{,}75 \cdot 10^7.$$

Wir erhalten dann

(118) $a = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm (Flächenladung).

Im Falle der Volumladung ist dieser Wert mit 6 : 5 zu multiplizieren; es wird

(118a) $a = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ cm (Volumladung).

Diese Zahlen sind natürlich mit denselben Fehlern behaftet, wie die Bestimmungen von e und η_0. Immerhin kann man wohl behaupten: Der Radius des Elektrons ist, wenn man die Masse als rein elektromagnetisch annimmt, in die Grenzen

$$10^{-13} < a < 2 \cdot 10^{-13}$$

einzuschließen. An Stelle der Formeln (117d, e) kann man auch die Reihenentwickelungen setzen

$$\text{(118b)} \quad m_s = m_0 \left\{ 1 + \frac{6}{5}\beta^2 + \frac{9}{7}\beta^4 + \frac{12}{9}\beta^6 + \cdots \right\},$$

$$\text{(118c)} \quad m_r = m_0 \left\{ 1 + \frac{6}{3 \cdot 5}\beta^2 + \frac{9}{5 \cdot 7}\beta^4 + \frac{12}{7 \cdot 9}\beta^6 + \cdots \right\}.$$

Für Unterlichtgeschwindigkeit — und nur hier gelten die Formeln (117d, e) überhaupt — sind diese Reihen konvergent. Man sieht, daß bei rascher Bewegung die longitudinale Masse stets größer ist, als die transversale. Wirkt eine Kraft schief zur Bewegungsrichtung, so ist die Beschleunigung keineswegs der Kraft parallel; der Beschleunigungsvektor schließt vielmehr, da die longitudinale Trägheit die transversale überwiegt, mit der Bahntangente im allgemeinen einen größeren Winkel ein, als der Kraftvektor. Nur wenn die Kraft parallel oder senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt, stimmen Kraft und Beschleunigung der Richtung nach überein. Die Masse ist eben in der Dynamik des Elektrons kein Skalar, wie in der gewöhnlichen Mechanik. Die Kraft ist hier eine lineare Vektorfunktion (vgl. I, § 14) der Beschleunigung von allgemeinerer Art. Die „elektro-

magnetische Masse“ ist das Koeffizientensystem der Gleichungen, welche die Kraftkomponenten durch die Beschleunigungskomponenten ausdrücken. Das System der elektromagnetischen Massen ist ein Tensortripel von rotatorischer Symmetrie um die Bewegungsrichtung des Elektrons; es ist etwa zu vergleichen dem Systeme der Trägheitsmomente eines Rotationskörpers, welches gleichfalls durch zwei Größen, das Moment um die Rotationsachse und um eine zu ihr senkrechte Achse, erst bestimmt wird; es ist in entsprechender Weise geometrisch darzustellen.

§ 21. Die Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen und der β-Strahlen.

Bei schnellen Kathodenstrahlen und bei der sogenannten β-Strahlung radioaktiver Körper hat man es mit negativen Elektronen zu tun, deren Geschwindigkeit keineswegs klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist; hier kommt die Unterscheidung der longitudinalen und der transversalen Masse in Betracht. Für die Ablenkbarkeit der Strahlen ist selbstverständlich die transversale Masse m_r und die entsprechende „transversale spezifische Ladung“

$$\eta_r = \frac{e}{c m_r} \tag{119}$$

maßgebend. Dabei ist e der elektrostatisch gemessene Betrag der Ladung.

Werden die β-Strahlen durch ein zur ursprünglichen Strahlrichtung senkrechtes magnetisches Feld abgelenkt, so ist die Bahnkrümmung gemäß Gleichung (7)

$$\frac{1}{R} = \eta_r \cdot \frac{|\mathfrak{H}^a|}{|\mathfrak{v}|}. \tag{119a}$$

Die Geschwindigkeit bleibt bei der Bewegung im magnetischen Felde konstant, da die im magnetischen Felde auf die Elektronen wirkende Kraft stets senkrecht zur Bewegungsrichtung gerichtet ist; der einzige Unterschied gegenüber

langsamen Kathodenstrahlen liegt hier darin, daß η_r eine Funktion der Geschwindigkeit ist. Es ist nach (117e)

$$\eta_r = \eta_0 \cdot \frac{4}{3\psi(\beta)}. \tag{119b}$$

Bei der Bewegung im elektrischen Felde liegt die Sache komplizierter. Zunächst ist der Zuwachs der Energie auf einem gewissen Wege der Arbeit der elektrischen Kraft gleich. Die Geschwindigkeitsänderung des negativen Elektrons auf einem gewissen Wege ist demgemäß im elektrostatischen Felde bestimmt durch

$$W - W_0 = e(\varphi - \varphi_0), \tag{120}$$

wo gemäß (113b) und (117b) zu setzen ist

$$W - W_0 = \frac{3}{4} m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - \frac{1}{\beta_0} \ln\left(\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}\right) \right\}. \tag{120a}$$

Ist die ursprüngliche Geschwindigkeit $c\beta_0$ bekannt und die durchlaufene Spannungsdifferenz, so ist die Endgeschwindigkeit $c\beta$ aus der transzendenten Gleichung zu berechnen

$$\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \frac{1}{\beta_0} \ln\left(\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}\right) + \frac{4}{3} \frac{\eta_0}{c} \left(\varphi - \varphi_0\right). \tag{120b}$$

Für kleine Werte von β_0 und β gilt näherungsweise

$$\beta^2 + \frac{3}{5}\beta^4 \cdots = \beta_0^2 + \frac{3}{5}\beta_0^4 + \cdots + \frac{2\eta_0}{c}\left(\varphi - \varphi_0\right); \tag{120c}$$

vernachlässigt man hier β^4 gegen β^2, β_0^4 gegen β_0^2, so gelangt man zur Gleichung (5a) zurück. Aber auch bei Kathodenstrahlen wird man, wenn es sich um genaue Messungen handelt, gut tun, die Gleichung (120c) an Stelle von (5a) zu setzen. Liegt etwa der in § 2 erörterte Fall vor, daß den Kathodenstrahlen durch ein elektrostatisches Feld ihre ganze Geschwindigkeit erteilt worden ist, so ist in (120c) β_0 gleich Null zu setzen. Tritt der Kathodenstrahl nun in ein magnetisches Feld ein, so bestimmt sich die Bahnkrümmung aus (119a), wobei derjenige Wert von η_r in Rechnung zu ziehen ist,

welcher dem aus (120c) zu ermittelnden Werte von β nach (119b) entspricht.

Bei geradliniger Bewegung im longitudinalen elektrostatischen Felde reicht die aus der Energiegleichung abgeleitete Relation (120b) aus. Besitzt indessen das elektrische Feld auch eine transversale Komponente, so bestimmt die Energiegleichung nicht vollständig die Bewegung; es ist die Impulsgleichung heranzuziehen. Diese ergibt, für die Ladung $-e$:

$$(121) \qquad \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_0 = -e \int_{t_0}^{t} \mathfrak{E}^a \, dt.$$

Handelt es sich um ein homogenes äußeres elektrisches Feld, wie es sich zwischen zwei Kondensatorplatten herstellt, so ist

$$(121\text{a}) \qquad \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_0 = -e \mathfrak{E}^a (t - t_0)$$

die Änderung des Impulses des negativen Elektrons. Die Bewegungsrichtung des Elektrons ist stets seinem Impulse parallel; daher folgt aus (115a) und (117e)

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{v} m_r = \mathfrak{v} m_0 \frac{3}{4} \psi(\beta),$$

so daß (121a) zu schreiben ist

$$(121\text{b}) \qquad \mathfrak{v} \psi(\beta) - \mathfrak{v}_0 \psi(\beta_0) = -\frac{4}{3} c \eta_0 \mathfrak{E}^a (t - t_0).$$

Kennt man die anfängliche Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ und die Zeit, während deren das negative Elektron das homogene Feld durcheilt, so ist aus dieser Beziehung die Endgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Größe und der Richtung nach bestimmt.

Auch ein zur ursprünglichen Bewegungsrichtung senkrechtes elektrisches Feld ändert, im Gegensatz zu dem magnetischen Felde, den Betrag der Geschwindigkeit, weil im Verlaufe der Bewegung $\mathfrak{v}$ eine zu $\mathfrak{E}^a$ parallele Komponente erhält. Ist indessen die Ablenkung des Strahles durch das transversale elektrische Feld nur gering, so kann man die Änderung des Betrages der Geschwindigkeit vernachlässigen und an Stelle von (121b) die vereinfachte Beziehung setzen

(121c) $$(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)\,\psi(\beta) = -\tfrac{4}{3} c\eta_0 \mathfrak{E}^a (t - t_0),$$

indem man β als konstant ansieht. Ist etwa die x-Achse der ursprünglichen Bewegungsrichtung parallel, so gilt in diesem Grenzfalle unendlich geringer Ablenkung ferner

$$x - x_0 = (t - t_0)\,|\mathfrak{v}|$$

und, wenn $\mathfrak{E}^a$ parallel der negativen y-Achse weist,

$$\frac{dy}{dt}\,\psi(\beta) = +\tfrac{4}{3} c\eta_0 |\mathfrak{E}^a|\,(t - t_0).$$

Es folgt daher als gesamte, beim Durchlaufen des elektrischen Feldes stattfindende Ablenkung parallel der y-Achse

(121d) $$y = c\eta_r |\mathfrak{E}^a| \frac{(t - t_0)^2}{2} = c\eta_r |\mathfrak{E}^a| \frac{(x - x_0)^2}{2|\mathfrak{v}|^2}.$$

Die unendlich kleine elektrische Ablenkung ist bei langsamen Kathodenstrahlen dem Quadrate der Geschwindigkeit umgekehrt proportional, die magnetische der Geschwindigkeit. Letzteres folgt aus (119a), da eine unendlich kleine Ablenkung im magnetischen Felde dem Krümmungsradius R umgekehrt proportional ist. Bei den Radiumstrahlen hingegen nehmen beide Ablenkungen stärker mit wachsender Geschwindigkeit der Strahlen ab; denn es nimmt die transversale spezifische Ladung η_r, nach (119b), mit wachsender Geschwindigkeit ab.

Durch Kombination von (119a) und (121d) folgt

(122) $$\frac{|\mathfrak{v}|}{c} = \beta = \frac{|\mathfrak{E}^a|}{|\mathfrak{H}^a|} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot \frac{1}{yR},$$

(122a) $$\eta_r = \eta_0 \frac{4}{3\psi(\beta)} = \frac{|\mathfrak{E}^a|}{|\mathfrak{H}^a|^2} \cdot \frac{c\,(x - x_0)^2}{2} \cdot \frac{1}{yR^2}.$$

Es kann also durch Kombination der magnetischen und der elektrischen Ablenkung sowohl die Geschwindigkeit, als auch die transversale spezifische Ladung ermittelt und so die von der Theorie geforderte Beziehung zwischen diesen beiden Größen experimentell geprüft werden.

Dieses Ziel war es, welches W. Kaufmann bei seinen Untersuchungen[1]) verfolgte. Läßt man die von einem Körnchen Radiumbromid ausgehende Strahlung durch eine kleine Öffnung treten, so bildet sich die Öffnung auf einer senkrecht zur Strahlrichtung gestellten photographischen Platte als Punkt ab. Bei elektrischer Ablenkung wird, infolge der verschiedenen Geschwindigkeiten der Elektronen, das von den β-Strahlen herrührende Bild in einen der Richtung des elektrischen Feldes parallelen geraden Strich ausgezogen; bei magnetischer Ablenkung ergibt sich ein zur magnetischen Feldrichtung senkrechter Strich. Die „Inhomogenität" der Strahlung macht es unmöglich, auf diese Weise die Ablenkung der einzelnen Strahlteilchen zu bestimmen. Es gelang indessen Kaufmann, gerade die Inhomogenität der Strahlung zur Lösung der Aufgabe zu benutzen, indem er gleichzeitig elektrisch und senkrecht dazu magnetisch ablenkte. Bei dieser, der Kundtschen Methode der Dispersionsmessung durch gekreuzte Spektren entsprechenden Anordnung wurde auf der photographischen Platte eine Kurve erhalten; die Koordinaten eines jeden Punktes der Kurve zeigten direkt die elektrische bzw. die magnetische Ablenkung des betreffenden Strahlteilchens an. Indem Kaufmann die Strahlen zwischen den Platten eines Kondensators hindurchtreten ließ, welche nur um 1,5 mm voneinander entfernt und auf einer Potentialdifferenz von 7000 Volt gehalten waren, indem er ferner parallel dem elektrischen Felde gleichzeitig ein magnetisches Feld erregte, erhielt er photographische Kurven, welche direkt die elektrische Ablenkung eines homogenen β-Strahles als Funktion der magnetischen Ablenkung darstellten. Dabei ist zwar, da es sich nicht um unendlich kleine Ablenkungen handelt, die elektrische Ablenkung nicht genau proportional dem in (121d) berechneten y zu setzen, und die magnetische Ablenkung nicht genau umgekehrt proportional dem in (119a) angegebenen Krümmungsradius R. Immerhin lassen sich den auf der photo-

---

1) W. Kaufmann, Gött. Nachr. 1901, S. 143; 1902, S. 291; 1903, S. 90.

graphischen Platte direkt beobachteten Ablenkungen zwei nur wenig von ihnen verschiedene Größen y' und z', die „reduzierte elektrische Ablenkung" und die „reduzierte magnetische Ablenkung" zuordnen, welche den in (122) und (122a) eingehenden Größen y und $\frac{1}{R}$ proportional sind; jene beiden von der Theorie geforderten Beziehungen lassen sich schreiben

$$\beta = k_1 \cdot \frac{z'}{y'}, \tag{122b}$$

$$\psi(\beta) = k_2 \cdot \frac{y'}{z'^2}. \tag{122c}$$

Die Konstanten k_1, k_2 hängen noch von den Abmessungen der Apparate, den Feldstärken, ferner von η_0 und c ab.

Die Prüfung der Theorie an der Hand der Beobachtungsergebnisse wurde schließlich so durchgeführt, daß zunächst versucht wurde, durch passende Wahl der Konstanten k_1 und k_2 die gemessenen reduzierten Ablenkungen durch die Formel (117e) darzustellen. Dieses erwies sich nun in der Tat für jede einzelne der photographischen Kurven als möglich; die maximale Abweichung (1,7 %) lag innerhalb der Fehlergrenze der Versuche. Aus den Werten von k_1, k_2 und der magnetischen Feldstärke konnte sodann die spezifische Ladung η_0 langsam bewegter Elektronen extrapoliert werden. Die im folgenden gegebene Tabelle bezieht sich auf die Platte Nr. 19, welche das klarste und fehlerfreieste Bild lieferte.

Die ersten beiden Zeilen enthalten die gemessenen reduzierten Ablenkungen z' und y'. Die dritte und vierte Zeile geben die auf Grund der Formeln (122b, c) von C. Runge[1]) nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Werte von y' und β an. Die Abweichung der beobachteten Werte von y' von den auf Grund der Formeln (122b, c) ausgeglichenen Werten, welche in der fünften Zeile aufgeführt sind, gestatten ein Urteil über die Genauigkeit, mit welcher die theoretische Formel (117e) für die transversale Masse gültig ist. Diese Übereinstimmung ist in Anbetracht des großen Bereiches von

1) C. Runge, Gött. Nachr. 1903, S. 326.

Geschwindigkeiten — $\psi(\beta)$ wächst in diesem Bereiche von 1,75 bis 4,3 — eine befriedigende zu nennen.

z'	y' beob.	y' ber.	β	
0,1495	0,04045	0,0388	0,990	+ 0,0016
0,199	0,0529	0,0527	0,969	+ 2
0,247	0,0678	0,0675	0,939	+ 3
0,296	0,0834	0,0842	0,902	− 8
0,3435	0,1019	0,1022	0,862	− 3
0,391	0,1219	0,1222	0,822	− 3
0,437	0,1429	0,1434	0,782	− 5
0,4825	0,1660	0,1665	0,744	− 5
0,5265	0,1916	0,1906	0,709	+ 10

Der auf Grund dieser Tabelle extrapolierte Wert der spezifischen Ladung langsam bewegter Elektronen ist

$$\eta_0 = 1{,}755 \cdot 10^7. \tag{123}$$

Diese Zahl liegt zwischen der direkt durch Beobachtungen an Kathodenstrahlen erhaltenen (Gleichung 9) und der aus der elementaren Theorie des Zeeman-Effektes abgeleiteten (Gleichung 61). Man darf daher annehmen, daß dieselben Teilchen bei diesen drei Vorgängen in Bewegung begriffen sind.

Es wäre von großem Interesse, die Kluft, welche noch die raschesten Kathodenstrahlen von den langsamsten β-Strahlen trennt, zu überbrücken. Einen Versuch in dieser Richtung hat H. Starke unternommen.[1]) Er wandte größere Entladungspotentiale als üblich zur Erzeugung der Kathodenstrahlen an; er gelangte indessen nur bis zu einem Entladungspotentiale von 36000 Volt, d. h. bis zu einer Geschwindigkeit von wenig mehr als einem Drittel der Lichtgeschwindigkeit. Es ergab sich ein merkliches Ansteigen der transversalen Masse mit wachsender Geschwindigkeit, entsprechend der Forderung der Theorie. Da indessen die Funktion $\psi(\beta)$, welche nach unserer

1) H. Starke, Verh. d. deutsch. physikal. Ges. 1903, S. 241.

Theorie dieses Anwachsen der Masse darstellt, in dem Intervalle von $\beta = 0$ bis $\beta = \frac{1}{3}$ nur um 5 % sich ändert und die Messungen mit einem Fehler von 2 % behaftet sind, so ist diese Übereinstimmung kaum als beweisend anzusehen. Immerhin ermutigen diese Versuche dazu, durch künstliche Beschleunigung der Kathodenstrahlen oder Verlangsamung der β-Strahlen das Intervall von $\beta = \frac{1}{3}$ bis $\beta = \frac{2}{3}$ auszufüllen und so den Anschluß an die Messungen Kaufmanns zu erreichen.

§ 22. Das Lorentzsche Elektron.

Gewisse Schwierigkeiten, welche in der Optik bewegter Körper auftreten (vgl. § 44), haben H. A. Lorentz veranlaßt[1]), unserer auf der kinematischen Grundhypothese (VII) fußenden Dynamik des Elektrons eine andere gegenüber zu stellen, welche diese Grundhypothese aufgibt. H. A. Lorentz behält nicht nur die allgemeinen Grundgleichungen (I bis V) bei, sondern auch die dynamische Grundgleichung (VI), welche verlangt, daß die resultierenden elektromagnetischen Kräfte des äußeren und des vom Elektron selbst erregten Feldes einander im Sinne der Mechanik starrer Körper das Gleichgewicht halten. Er nimmt indessen das Elektron nicht als „starr" an, sondern läßt eine Formänderung desselben zu. Im Ruhezustande soll das Elektron eine Kugel vom Radius a sein; bei der Bewegung aber soll es sich parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis

$$\varkappa = \sqrt{1 - \beta^2}$$

kontrahieren. Das gleichförmig translatorisch bewegte Elektron soll demnach ein Heaviside-Ellipsoid sein.

Wir wollen die Lagrangesche Funktion, sowie die elektromagnetische Energie und Bewegungsgröße eines solchen Lorentzschen Elektrons berechnen. Das elektromagnetische Feld bestimmt sich aus den Ansätzen des § 18; die Anwendung

1) H. A. Lorentz. K. Akad. van Wetensch. te Amsterdam, 12, S. 986, 1904; vgl. auch M. Abraham. Physik. Zeitschr. (5), S. 576, 1904.

der dort gegebenen Transformation (105) gestaltet sich hier besonders einfach. Das bewegte System Σ ist ein Heaviside-Ellipsoid; geht man durch Streckung parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis $\varkappa^{-1}$ zum ruhenden System Σ_0 über, so erhält man eine Kugel vom Radius a. Die Energie dieser Kugel ist, im Falle der Flächenladung,

$$U_0 = \int \frac{dv_0}{8\pi} \mathfrak{E}_0^2 = \frac{e^2}{2a}. \tag{124}$$

Die Lagrangesche Funktion, welche nach (104b) im Falle gleichförmiger Bewegung der Kräftefunktion entgegengesetzt gleich ist, wird, gemäß (106d),

$$L = -\varkappa U_0 = -\varkappa \frac{e^2}{2a}. \tag{124a}$$

Ferner folgt aus (102) und (106)

$$\Phi = \frac{1}{\varkappa} \varphi_0, \tag{124b}$$

und daher aus (101d) und (105)

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} = \frac{1}{\varkappa} \mathfrak{E}_{0y}, \\ \mathfrak{E}_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_0} = \frac{1}{\varkappa} \mathfrak{E}_{0z}. \end{aligned} \right. \tag{124c}$$

Hieraus und aus (101f) bestimmt sich die x-Komponente des Vektors $\mathfrak{g}$, welcher die Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße anzeigt:

$$\mathfrak{g}_x = \frac{1}{4\pi c} \left\{ \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y \right\} = \frac{\beta}{4\pi c} \left\{ \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2 \right\} = \frac{\beta}{4\pi c \varkappa^2} \left\{ \mathfrak{E}_{0y}^2 + \mathfrak{E}_{0z}^2 \right\}.$$

Durch Integration über das Feld des Systemes Σ, dessen Volumelemente denen des ruhenden Systemes Σ_0 durch (105) zugeordnet, und daher im Verhältnis

$$dv : dv_0 = \varkappa$$

verkleinert sind, folgt

$$\mathfrak{G}_x = \int dv\, \mathfrak{g}_x = \frac{\beta}{4\pi c \varkappa} \cdot \int dv_0 \left\{ \mathfrak{E}_{0y}^2 + \mathfrak{E}_{0z}^2 \right\}. \tag{124d}$$

Beachtet man ferner, daß in Σ_0 das Feld dasjenige einer ruhenden Kugel ist, daß mithin aus Symmetriegründen

$$\int d v_0 \mathfrak{E}_{0x}^2 = \int d v_0 \mathfrak{E}_{0y}^2 = \int d v_0 \mathfrak{E}_{0z}^2$$

gilt, so erhält man

$$\int \frac{d v_0}{8\pi} \left\{ \mathfrak{E}_{0y}^2 + \mathfrak{E}_{0z}^2 \right\} = \frac{2}{3} \int \frac{d v_0}{8\pi} \mathfrak{E}_0^2 = \frac{2}{3} U_0.$$

Der Betrag des der Bewegungsrichtung des Heaviside-Ellipsoides parallelen Vektors $\mathfrak{G}$ wird demnach

$$(124e) \qquad |\mathfrak{G}| = \frac{4}{3} \frac{\beta}{c\varkappa} U_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a c^2} \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa}, \quad \left\{ \varkappa = \sqrt{1-\beta^2} \right\}.$$

Aus der so bestimmten elektromagnetischen Bewegungsgröße folgt, auf Grund der allgemeinen Beziehung (103), die doppelte magnetische Energie

$$(124f) \qquad 2T = \frac{2}{3} \frac{e^2 \beta^2}{a \varkappa}.$$

Hieraus und aus (124a) erhält man, für die gesamte elektromagnetische Energie des Heaviside-Ellipsoides, den Ausdruck

$$(124g) \qquad W' = 2T - L = \frac{e^2}{2a\varkappa}\left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right).$$

H. A. Lorentz nimmt nun an, daß die träge Masse des Elektrons rein elektromagnetischer Art ist; demgemäß zieht er, neben der elektromagnetischen Bewegungsgröße (124e), eine materielle Bewegungsgröße nicht in Rechnung. Er erhält auf Grund der Formeln (115) und (115a), für die longitudinale und transversale Masse

$$(125) \qquad m_s = m_0 \cdot \varkappa^{-3} = m_0 \cdot (1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$(125a) \qquad m_r = m_0 \cdot \varkappa^{-1} = m_0 \cdot (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}};$$

m_0 stellt dabei den gemeinsamen Grenzwert beider Massen bei langsamer Bewegung vor, der im Falle der Flächenladung durch (117b), im Falle der Volumladung durch (117c) ge-

geben wird. Nach dem in § 18 bewiesenen Satze geht der Wert von U_0 im Falle der Volumladung aus dem im Falle der Flächenladung gültigen Werte durch Multiplikation mit $^6/_5$ hervor; mit demselben Faktor sind demnach die Ausdrücke der Lagrangeschen Funktion (124a), der Bewegungsgröße (124e) und der elektromagnetischen Energie (124g) beim Übergang zur Volumladung zu multiplizieren.

Versucht man, die longitudinale elektromagnetische Masse des Lorentzschen Elektrons auf Grund der Formeln (115b) und (124g) zu berechnen, indem man annimmt, daß die Energie des Elektrons rein elektromagnetischer Natur ist, so gelangt man zu einem Ergebnis, welches zu (125) in Widerspruch steht. Das kann nicht wundernehmen; haben wir doch in § 19 gesehen, daß die Relation (111b), welche die Identität der aus der elektromagnetischen Energie und aus der elektromagnetischen Bewegungsgröße abgeleiteten Werte der Masse ausspricht, auf der Annahme einer unveränderlichen Ladungsverteilung beruht. Für das Lorentzsche Elektron, welches der Grundhypothese (VII) nicht gehorcht, gilt diese Relation ebensowenig, wie die Gleichungen (111) und (111a), welche Impuls und Energie mit der Lagrangeschen Funktion verknüpfen. In der Tat, nach (124a) ist

$$\frac{dL}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{e^2}{2a} \cdot \frac{\beta}{\varkappa c} = \frac{e^2}{2ac^2} \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa} = \frac{3}{4} m_0 \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa}, \tag{126}$$

während nach (124e) und (125a)

$$|\mathfrak{G}| = m_0 \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa} = m_r \cdot |\mathfrak{v}|$$

ist.

Während für das „starre“ Elektron die Differenz dieser beiden Größen verschwindet, hat sie für das deformierbare Elektron den von Null verschiedenen Wert

$$\frac{dL}{d|\mathfrak{v}|} - |\mathfrak{G}| = -\frac{1}{4} m_0 \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa} = -\frac{1}{4} m_r \cdot |\mathfrak{v}|. \tag{126a}$$

Da nun allgemein gilt:

$$W = 2T - L = |\mathfrak{v}| \cdot |\mathfrak{G}| - L,$$

so folgt

$$\frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|} = \frac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} + \frac{1}{|\mathfrak{v}|}\left\{|\mathfrak{G}| - \frac{dL}{d|\mathfrak{v}|}\right\}.$$

Hieraus ersieht man, daß (115) und (115b) nicht zu demselben Werte der longitudinalen Masse führen können. Bestimmt man die Masse durch die elektromagnetische Bewegungsgröße, so ist, für das Lorentzsche Elektron, (115b) zu ersetzen durch

(126b) $$\frac{1}{|\mathfrak{v}|}\frac{dW}{d|\mathfrak{v}|} = m_s + \frac{1}{4} m_r.$$

Da die longitudinale Masse des Lorentzschen Elektrons sich nicht aus der elektromagnetischen Energie allein ableiten läßt, so müssen wir, um das Energieprinzip aufrechtzuerhalten, diesem Elektron eine innere Energie E nicht elektromagnetischer Art zuschreiben. In der Tat, es soll sich ja das Elektron bei einer Zunahme der Geschwindigkeit abplatten; dabei wird gegen die elektrodynamischen Kräfte, mit denen sich die Volumelemente abstoßen, Arbeit geleistet. Während für das starre Elektron die Zunahme der elektromagnetischen Energie gleich der von der äußeren Kraft $\mathfrak{K}^a$ geleisteten Arbeit ist, findet das hier nicht mehr statt. Die Zunahme der elektromagnetischen Energie bei einer Beschleunigung ist, für das Lorentzsche Elektron, größer, als die Arbeit der äußeren Kräfte.

Die innere Energie E, durch deren Annahme man das Energieprinzip aufrechterhalten kann, darf nicht als kinetische Energie im Sinne der gewöhnlichen Mechanik betrachtet werden; denn in diesem Falle würde jede Berechtigung dafür wegfallen, daß Bewegungsgröße im Sinne der gewöhnlichen Mechanik nicht angenommen wird. Immerhin kann E von der Geschwindigkeit abhängen, da ja diese die Form des Elektrons bestimmt. Die Energiegleichung verlangt

(127) $$\frac{d\{W+E\}}{dt} = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{K}^a),$$

und der Impulssatz

(127a) $$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K}^a.$$

Durch Kombination dieser beiden Sätze erhält man

$$\frac{d\{W+E\}}{dt}=\left(\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{G}}{dt}\right),$$

oder

$$\left(\mathfrak{G}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left\{(\mathfrak{v}\mathfrak{G})-W-E\right\}. \tag{127b}$$

Für gleichförmige Bewegung ist nun

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{G})-W=2T-W=T-U=L.$$

Für quasistationäre Bewegungen wird diese Beziehung als gültig angesehen, und es wird L, wie E, als Funktion der jeweiligen Geschwindigkeit betrachtet. Es wird mithin

$$\frac{d\{L-E\}}{dt}=\frac{d\{L-E\}}{d|\mathfrak{v}|}\cdot\frac{d|\mathfrak{v}|}{dt}. \tag{127c}$$

Da ferner, bei stationärer und quasistationärer Bewegung, für das Lorentzsche Elektron aus Symmetriegründen der Impuls parallel der Bewegungsrichtung ist, so gilt

$$\left(\mathfrak{G}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)=|\mathfrak{G}|\frac{d|\mathfrak{v}|}{dt}. \tag{127d}$$

Nach (127b) sollen nun die Ausdrücke (127c) und (127d) einander gleich sein, und zwar für beliebige Werte der Beschleunigung; hieraus folgt die Relation

$$|\mathfrak{G}|=\frac{d(L-E)}{d|\mathfrak{v}|}. \tag{128}$$

Dieselbe ist als Verallgemeinerung der Relation (111) anzusehen; sie geht in jene über, wenn man eine Energie E nicht elektromagnetischer Art ausschließt.

Hier tritt der bereits in § 16 erörterte Zusammenhang der kinematischen Grundgleichung (VII) mit dem Grundgedanken des elektromagnetischen Weltbildes deutlich hervor. Für das starre Elektron gilt (111) allgemein, es folgt daher aus (128)

$$\frac{dE}{d|\mathfrak{v}|}=0,$$

d. h. eine etwa angenommene Energie nicht elektromagnetischer Art würde bei einer Änderung der Geschwindigkeit sich nicht

ändern. Etwa angenommene innere Kräfte nicht elektromagnetischer Natur würden dabei keine Arbeit leisten. Unsere auf der Grundgleichung (VII) fußende Dynamik des Elektrons braucht daher solche Kräfte und eine solche Energie nicht einzuführen, eine „potentielle" Energie ebensowenig, wie eine kinetische. Die Lorentzsche Dynamik des Elektrons sieht gleichfalls die träge Masse als rein elektromagnetische an, und schließt daher eine kinetische Energie im Sinne der gewöhnlichen Mechanik aus. Sie muß indessen eine „potentielle" innere Energie des Elektrons einführen. Aus (128), im Verein mit (126a) und (126), folgt:

$$\frac{dE}{d|\mathfrak{v}|} = -\frac{1}{4} m_0 \cdot \frac{|\mathfrak{v}|}{\varkappa} = -\frac{1}{3} \frac{dL}{d|\mathfrak{v}|}, \tag{128a}$$

und, durch Integration,

$$E = E_0 - \frac{1}{3}(L - L_0); \tag{128b}$$

hier sind E_0, L_0 die Werte, welche E und L für das ruhende Elektron besitzen. Aus (124a) folgt

$$E = E_0 - \frac{e^2}{6a}(1 - \varkappa). \tag{128c}$$

Diese Formel gibt an, wie die „potentielle" Energie des Lorentzschen Elektrons mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt. Für Lichtgeschwindigkeit, wo dasselbe in eine Kreisscheibe übergeht, wird $\varkappa$ gleich Null, mithin die potentielle Energie

$$E_1 = E_0 - \frac{e^2}{6a}. \tag{128d}$$

Wir können daher auch schreiben

$$E = E_1 + \frac{e^2 \varkappa}{6a}. \tag{129}$$

Diese potentielle Energie nicht elektromagnetischer Art muß man dem Lorentzschen Elektron zuschreiben, wenn man das Energieprinzip aufrechtzuerhalten wünscht.

Bei diesem Ergebnis wird man sich kaum beruhigen; man wird vielmehr weiter fragen, nach welchem Gesetz die

inneren Kräfte wirken sollen, die sich aus einer solchen potentiellen Energie herleiten. Nur indem man hierüber bestimmte Annahmen macht, wird man über das Verhalten des Lorentzschen Elektrons bei allgemeineren Bewegungen (nicht quasistationären oder nicht rein translatorischen) etwas Bestimmtes aussagen können. Man kann daran denken, elastische Kräfte zwischen den benachbarten Volumelementen des Elektrons anzunehmen, und eine Theorie des deformierbaren Elektrons von der in § 16 angedeuteten Art zu entwickeln. Eine solche Theorie würde die Trägheit des Elektrons erklären, aber nicht rein elektromagnetisch; sie würde die kinetische Energie zurückführen auf die weniger gut verstandene potentielle Energie und auf die elektromagnetische Energie. Auf einer solchen Dynamik des Elektrons läßt sich kein elektromagnetisches System der Physik aufbauen. Wenn man in die Dynamik des Elektrons elastische Kräfte einführt, so ist es logisch unmöglich, die Elastizität der Materie durch Zurückführung auf die Mechanik der Elektronen rein elektromagnetisch zu deuten.

H. A. Lorentz hat gezeigt, daß die Formel (125a) für die transversale Masse die Versuche Kaufmanns nicht wesentlich schlechter darstellt, als unsere Formel (117a). Es ist zu hoffen, daß weitere experimentelle Untersuchungen darüber entscheiden, welche von den beiden Theorien in dieser Hinsicht den Vorzug verdient. Sollte die Entscheidung zugunsten des Lorentzschen Elektrons fallen, so würde dieses Ergebnis gegen die Möglichkeit eines rein elektromagnetischen Weltbildes Zeugnis ablegen. Die Hoffnung, in den Elektronen die kleinsten Bausteine des Weltgebäudes gefunden zu haben, würde dann als fehlgeschlagen zu betrachten sein.

§ 23. Der Bereich der quasistationären Bewegung.

Im ersten Bande dieses Werkes wurde gegen die Theorie des quasistationären Stromes ein Einwand gemacht; es wurde mehrfach betont, daß diese Theorie von dem Energieverlust

durch Strahlung keine Rechenschaft gibt. Derselbe Einwand ist gegen die in den vorangegangenen Paragraphen dargelegte Theorie der quasistationären Elektronenbewegung zu erheben. Diese Theorie bestimmt die Energie und den Impuls des vom Elektron erregten Feldes so, als ob sie der jeweiligen Geschwindigkeit des Elektrons entsprächen. Bei periodischen Bewegungen führt diese Behandlungsweise zu der Konsequenz, daß nach dem Ablauf einer Periode die Energie und die Bewegungsgröße des Feldes zu den Anfangswerten zurückgekehrt seien, daß also das Wegintegral und das Zeitintegral der äußeren Kraft für eine ganze Schwingung gleich Null sei. Das ist nun, wie im zweiten Kapitel dieses Bandes dargelegt wurde, keineswegs der Fall; auch bei periodischen Bewegungen ist das Wegintegral und im allgemeinen auch das Zeitintegral der äußeren Kraft von Null verschieden. Die Arbeitsleistung und der Impuls der äußeren Kraft findet sich in der Energie und der Bewegungsgröße der entsandten Wellen wieder. Die entsandte Wellenstrahlung ist es eben, die man vernachlässigt, wenn man die beschleunigte Bewegung des Elektrons als quasistationär betrachtet.

Die Entwickelungen des vorigen Kapitels gestatten es uns, diese Lücke unserer Theorie sogleich auszufüllen. Haben wir doch in Gleichung (85) des § 15 den allgemeinen Ausdruck für die Rückwirkung der Strahlung angegeben. Wir setzen jetzt für die gesamte, vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft

(130) $$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' + \mathfrak{K}'',$$

indem wir unter

(130a) $$\mathfrak{K}' = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}$$

die nach den Ansätzen der vorigen Paragraphen berechnete Kraft verstehen, unter

(130b) $$\mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}^s$$

aber die in (85) angegebene Reaktionskraft der Strahlung. Dabei ist zu bemerken, daß $\mathfrak{G}$, der Impuls des vom Elektron mitgeführten Feldes, von den über die Form des Elektrons

gemachten Annahmen abhängt, während die Rückwirkung der Strahlung sich ohne solche Annahmen angeben ließ, wenigstens dann, wenn es gestattet war, das Elektron hinsichtlich der entsandten Wellenstrahlung als einer Punktladung äquivalent zu betrachten. Alsdann erfüllt der Ansatz (130) für die innere Kraft allgemein die Energiegleichung und die Impulsgleichung; denn die Arbeitsleistung der Zusatzkraft $\mathfrak{K}^s$ ist, wie aus den Entwickelungen des § 15 hervorgeht, für ein Intervall beschleunigter Bewegung entgegengesetzt gleich der in diesem Intervalle ausgestrahlten Energie, das Zeitintegral von $\mathfrak{K}^s$ entgegengesetzt gleich der ausgestrahlten Bewegungsgröße. Bestimmen wir die Bewegung des Elektrons aus der korrigierten Bewegungsgleichung

$$\mathfrak{K}^a = -\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} - \mathfrak{K}^s, \tag{130c}$$

so sind wir von vornherein sicher, in keinen Widerspruch mit dem Energieprinzip oder dem Impulssatze zu geraten. Wir fassen eine Bewegung ins Auge, die zuerst gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ verläuft, dann in beliebiger Weise beschleunigt wird, und weiterhin wieder stationär mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ vor sich geht. Wir warten so lange, bis die entsandten Wellen sich hinreichend weit von dem (mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegten) Elektron entfernt haben. Innerhalb des von der Wellenzone eingerahmten Raumes besteht dann das Feld, welches der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ entspricht und dessen Energie und Impuls W_2 bzw. $\mathfrak{G}_2$ sind. Die Energie und die Bewegungsgröße des außerhalb der Wellenzone liegenden Feldes kommen nicht in Betracht. Werden für die Energie W_{12} und der Impuls $\mathfrak{G}_{12}$ der Wellenzone die im vorigen Kapitel gefundenen Werte eingesetzt, so gilt allgemein

$$\int_1^2 \mathfrak{K}^a dt = \mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_{12}, \tag{130d}$$

$$\int_1^2 (\mathfrak{v}\,\mathfrak{K}^a)\, dt = W_2 - W_1 + W_{12}, \tag{130e}$$

wenigstens für unser starres Elektron. Beim Lorentzschen Elektron ist, wie wir soeben gesehen haben, noch die Änderung der „inneren potentiellen Energie" in Rechnung zu setzen.

Wir sind jetzt in der Lage, den Gültigkeitsbereich der quasistationären Bewegung anzugeben: Wir dürfen die Bewegung als quasistationäre behandeln, wenn gegen die so berechnete innere Kraft $\mathfrak{K}'$ die Reaktionskraft $\mathfrak{K}''$ der Strahlung verschwindet.

Betrachten wir etwa eine Kreisbewegung, wie sie die Elektronen der Radium-Strahlung in einem zur ursprünglichen Strahlrichtung senkrechten magnetischen Felde ausführen. Hier ist der Betrag der Trägheitskraft der quasistationären Bewegung für das starre kugelförmige Elektron nach (117e)

$$(131) \qquad |\mathfrak{K}'| = m_r \frac{|\mathfrak{v}|^2}{R} = m_0 \frac{3}{4} \frac{|\mathfrak{v}|^2}{R} \psi(\beta).$$

Die Reaktionskraft der Strahlung aber ist nach Gleichung (88)

$$\mathfrak{K}'' = -\mathfrak{v} \cdot \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\mathfrak{v}^2}{\varkappa^4 R^2},$$

so daß man erhält

$$(131\text{a}) \qquad |\mathfrak{K}''| = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{|\mathfrak{v}|^3}{\varkappa^4 R^2}, \qquad \varkappa^2 = 1 - \beta^2.$$

Setzt man für m_0 den im Falle der Flächenladung gültigen Wert (117b), so folgt

$$(131\text{b}) \qquad |\mathfrak{K}''| : |\mathfrak{K}'| = \frac{4}{3} \frac{a}{R} \cdot \frac{\beta}{\varkappa^4 \psi(\beta)}.$$

Für Bewegungen, die der Lichtgeschwindigkeit nicht gar zu nahe kommen, ist die eingehende Funktion von β keine große Zahl. Hier verschwindet der Betrag von $\mathfrak{K}''$ gegen den von $\mathfrak{K}'$, falls der Krümmungsradius R der Bahn groß gegen den Radius des Elektrons ist. Wir sehen also: Die Ablenkbarkeit der in den Kathodenstrahlen und in den β-Strahlen des Radiums bewegten Elektronen darf in allen praktischen Fällen auf Grund der Ansätze der Theorie der quasistationären Bewegung berechnet werden.

Um zu zeigen, daß dieses auch für die raschesten der Elektronen gilt, deren Ablenkung man hat beobachten können, ziehen wir die Tabelle des § 21 heran. Für die raschesten der von Kaufmann untersuchten Strahlteilchen war

$$\beta = 0{,}990; \quad 1 - \beta = 0{,}01;$$

wir erhalten daher

$$\varkappa^4 = (1 - \beta^2)^2 = 4 \cdot 10^{-4}, \quad \psi(\beta) = 4{,}3.$$

Man sieht, daß die Funktion von β, welche das Ansteigen des Quotienten $|\mathfrak{K}''| : |\mathfrak{K}'|$ bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit bedingt, hier bereits von Bedeutung wird; ihr Wert ist hier

$$\frac{4}{3} \frac{\beta}{\varkappa^4 \psi(\beta)} = 7{,}7 \cdot 10^2.$$

Dafür ist aber der Radius des Elektrons sehr klein gegen den Krümmungsradius der Bahn. Letzterer berechnet sich aus der reduzierten magnetischen Ablenkung

$$z' = 0{,}1495$$

und der von Kaufmann angegebenen Beziehung[1])

$$z' = \frac{4{,}176}{R} \quad \text{zu} \quad R = 28 \text{ cm}.$$

Setzt man endlich für a den unter Annahme von Flächenladung berechneten Wert (Gleichung 118) ein, so findet sich

$$|\mathfrak{K}''| : |\mathfrak{K}'| = \frac{7{,}7 \cdot 10^2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-13}}{28} = 3 \cdot 10^{-12}.$$

Die magnetische Feldstärke war hier gleich 200 absoluten Einheiten. Nimmt man nun auch ein 300mal stärkeres magnetisches Feld an, so beträgt der bei Annahme quasistationärer Bewegung begangene relative Fehler immer noch weniger als 10^{-9}. Auch die Bewegung der raschesten beobachtbaren β-Strahlteilchen in experimentell herstellbaren magnetischen Feldern ist demnach als quasistationär zu betrachten.

1) W. Kaufmann, l. c. Gött. Nachr. 1903, Gl. 6. S. 95.

Übrigens ist der Ausdruck für die Reaktionskraft der Strahlung, welcher in § 15 angegeben wurde, nicht streng gültig; er gilt nur angenähert, und zwar dann, wenn es gestattet ist, das Elektron bei der Berechnung der entsandten Wellen einer Punktladung äquivalent zu setzen. Die Bedingung (63b), unter der dieses gestattet war, lautet

$$\frac{|\dot{\mathfrak{v}}|\,2a}{c^2(1-\beta)} \text{ klein gegen } 1.$$

Für rein transversale Beschleunigung ergibt dies

$$\frac{2a}{R}\,\frac{\beta^2}{1-\beta} \text{ klein gegen } 1. \tag{132}$$

Unter Berücksichtigung der obigen Zahlwerte erhalten wir für diesen Bruch den Wert

$$\frac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-13}}{28 \cdot 10^{-2}} = 10^{-12} \text{ ca.}$$

Einen so geringen Fehler begeht man, wenn man für die raschesten der von Kaufmann beobachteten Elektronen die infolge der transversalen Beschleunigung stattfindende Strahlung und deren Rückwirkung aus den Ansätzen des vorigen Kapitels berechnet; diese Rückwirkung verschwindet wiederum gegen die Trägheitskraft des mitgeführten Feldes.

Je mehr man sich indessen der Lichtgeschwindigkeit nähert, desto größer werden die Zahlwerte der Brüche (131b) und (132); denn dieselben enthalten im Nenner $(1-\beta)^2$ bzw. $(1-\beta)$. Allerdings wird, wenn man durch eine gegebene äußere Kraft ablenkt, die Bahnkrümmung $1:R$ umgekehrt proportional zu $\psi(\beta)$ bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit abnehmen; aber $\psi(\beta)$ wird für $\beta = 1$ nur logarithmisch unendlich, so daß dieser Umstand nicht so wesentlich ist. Man wird also bei weiterer Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit zu einem Punkte kommen, wo die Reaktionskraft der Strahlung nicht mehr gegen die Trägheitskraft des mitgeführten Feldes verschwindet und wo es auch nicht mehr gestattet ist, die Reaktionskraft so zu berechnen, als ob das Elektron ausdehnungslos wäre.

Jene beiden Kräfte sind im Grunde nichts anderes, als die beiden ersten Terme einer Reihenentwickelung

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' + \mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' + \cdots, \tag{133}$$

die nach aufsteigenden Potenzen des Radius a des Elektrons fortschreitet. Der erste Term, die elektromagnetische Trägheitskraft, enthält a im Nenner; der zweite enthält a überhaupt nicht, wie er ja von den speziellen, über Form und Ladungsverteilung gemachten Annahmen unabhängig ist. Der dritte Term wird wieder von der Form und Ladungsverteilung abhängen und für unser kugelförmiges Elektron a im Zähler enthalten. Da die innere Kraft $\mathfrak{K}$ durch die Geschwindigkeit und durch die Beschleunigung bestimmt ist, welche in einem endlichen, dem betreffenden Zeitpunkte vorangegangenen Intervalle geherrscht haben (vgl. § 17), so ist eine solche Reihenentwickelung immer dann möglich, wenn die Bewegung stetig ist und ihre Geschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Je weiter man die Reihenentwickelung führt, desto höhere Differentialquotienten von $\mathfrak{v}$ und desto höhere Potenzen dieser Differentialquotienten werden zu berücksichtigen sein.[1]) Die Reihe wird um so schlechter konvergieren, je mehr sich die Bewegung einer unstetigen und die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit nähert. Im Falle des oben durchgerechneten Beispieles konvergiert die Reihe noch außerordentlich gut. Für unstetige Bewegungen und für Bewegungen mit Lichtgeschwindigkeit oder gar Überlichtgeschwindigkeit versagt sie völlig. Hier müssen zur Berechnung der inneren Kraft andere Methoden herangezogen werden.

---

1) Die in den Differentialquotienten von $\mathfrak{v}$ linearen Glieder sind für den Fall der Volumladung von G. Herglotz (Gött. Nachr. 1903, S. 357) allgemein berechnet worden. Es ergibt sich die Möglichkeit kleiner, gedämpfter Eigenschwingungen des Elektrons auch bei Abwesenheit quasielastischer Kräfte. Doch ist die Wellenlänge der langsamsten Eigenschwingung von der Größenordnung des Radius des Elektrons, so daß eine elektromagnetische Erklärung der Spektrallinien hieraus nicht zu gewinnen ist.

§ 24. Das Feld eines beliebig bewegten Elektrons.

Während wir bisher bei der Integration der Feldgleichungen uns auf gewisse Spezialfälle beschränkt hatten, nämlich auf den Fall der gleichförmigen Bewegung beliebiger Ladungen und auf den Fall beliebiger Bewegung einer Punktladung, wollen wir jetzt dazu übergehen, das Feld eines beliebig bewegten Elektrons unter Berücksichtigung der räumlichen Ausdehnung des Elektrons zu bestimmen. Die allgemeinen Formeln, durch die wir in § 8 die elektromagnetischen Potentiale darstellten, werden uns zur Lösung dieser Aufgabe führen. Die Formeln (50a) und (51a) daselbst lauten

$$d\Phi = \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \varrho\,(\lambda, l - \lambda), \tag{134}$$

$$d\mathfrak{A} = \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \mathfrak{i}\,(\lambda, l - \lambda). \tag{134a}$$

Diese Formeln sind noch von jeder Voraussetzung über die Form und die Ladungsverteilung des Elektrons unabhängig. Wir wenden sie an auf unser kugelförmiges Elektron vom Radius a mit gleichförmig verteilter Flächenladung oder Volumladung.

A. Flächenladung.

Wir verstehen unter R die Entfernung des betreffenden Aufpunktes P von dem Mittelpunkte M des Elektrons in irgendeiner früheren Lage des letzteren; $t = \frac{l}{c}$ ist die Zeit, zu der das Feld im Aufpunkte bestimmt werden soll, $\tau = \frac{\lambda}{c}$ die Latenszeit. Ist die translatorische Bewegung des Elektrons gegeben, so ist R als Funktion von $\lambda = c\tau$ bekannt. Das Elektron wird nun in seiner zur Zeit $t - \tau = \frac{l - \lambda}{c}$ eingenommenen Lage zum Felde im Aufpunkte nur dann etwas beisteuern können, wenn die um den Aufpunkt mit dem Radius λ geschlagene Kugel es schneidet. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn aus den drei Strecken R, λ und a ein Dreieck gebildet werden kann. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so gibt es keinen Punkt des Elektrons, von dem aus ein Beitrag,

zur Zeit $t - \frac{\lambda}{c}$ entsandt, nach Durchlaufung des Latensweges λ im Aufpunkte zur Zeit t eintrifft. Diese Bedingung

(135) Aus R, λ, a ist Dreiecksbildung möglich

ergibt für einen äußeren Punkt die Ungleichung

$$R - a \leqq \lambda \leqq R + a, \tag{135a}$$

für einen inneren Punkt hingegen

$$a - R \leqq \lambda \leqq a + R. \tag{135b}$$

Dabei ist im Auge zu behalten, daß es sich um einen im Raume festen Aufpunkt handelt, dagegen um ein bewegtes Elektron; es kann daher für die Bestimmung des Feldes zur Zeit t ein und derselbe Aufpunkt bald als äußerer, bald als innerer Punkt gelten, je nach der früheren Lage des Elektrons, welche der betreffenden Latenszeit zuzuordnen ist.

Wir betrachten jetzt das Dreieck aus den Strecken R, λ, a (Abb. 3). Es gilt

$$2aR\cos\vartheta = R^2 + a^2 - \lambda^2. \tag{135c}$$

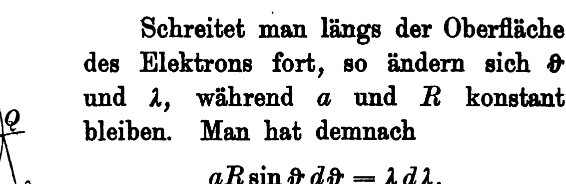


Abb. 3.

Schreitet man längs der Oberfläche des Elektrons fort, so ändern sich ϑ und λ, während a und R konstant bleiben. Man hat demnach

$$aR\sin\vartheta\, d\vartheta = \lambda\, d\lambda.$$

Zwei mit den Radien λ und $\lambda + d\lambda$ um P geschlagene Kugeln schneiden aus der Oberfläche des Elektrons einen Streifen aus von dem Flächeninhalte

$$2\pi a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi\frac{a}{R}\cdot\lambda\, d\lambda.$$

Da die Elektrizität mit der Dichte $\frac{e}{4\pi a^2}$ über die Oberfläche verteilt ist, so befindet sich auf jenem Streifen die Elektrizitätsmenge

$$\frac{e}{2aR}\cdot\lambda\, d\lambda.$$

Diese Elektrizitätsmenge, die von den beiden benachbarten Kugeln λ, $\lambda + d\lambda$ eingeschlossen wird, drückt sich in der Schreibweise der Formel (134) aus durch

$$\lambda^2 d\lambda \int d\omega\, \varrho(\lambda, l - \lambda).$$

Jene Formel besagt, daß der Beitrag zum skalaren Potentiale erhalten wird, indem man durch λ dividiert. Der Beitrag wird daher

$$d\Phi = \frac{e}{2a} \cdot \frac{d\lambda}{R}. \tag{136}$$

Um für eine gegebene Bewegung des Elektrons das skalare Potential im Aufpunkte zu bestimmen, ist nur eine einmalige Integration nach dem Latenswege λ auszuführen; dabei ist für jeden Aufpunkt R als Funktion von λ zu betrachten, und es ist die Integration zwischen den durch (135a, b) bestimmten Grenzen zu nehmen.

Wie die jeweilige Ladungsverteilung, so ist auch der Beitrag zum skalaren Potential für das allseitig symmetrische Elektron von der Rotationsbewegung unabhängig. Was jedoch das elektromagnetische Vektorpotential anbelangt, so sind die Beiträge der elektrizitätserfüllten Volumelemente hier, statt durch ϱ, durch

$$\mathfrak{k} = \varrho \frac{\mathfrak{v}}{c} = \frac{\varrho}{c}\left\{\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u r}]\right\}$$

bestimmt, gemäß unserer kinematischen Grundgleichung (VII). Dementsprechend geht der Translationsbestandteil $\mathfrak{A}_1$ des Vektorpotentiales aus dem skalaren Potentiale hervor, indem die Beiträge aller Volumelemente mit dem gleichen Faktor $\frac{\mathfrak{v}_0}{c}$ multipliziert werden; dabei ist natürlich unter $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit zur Zeit $t - \frac{\lambda}{c}$ zu verstehen. Wir erhalten demnach als Beitrag des von den Kugeln λ, $\lambda + d\lambda$ aus dem Elektron herausgeschnittenen Streifens zum Translationsbestandteil des Vektorpotentiales

$$d\mathfrak{A}_1 = \frac{e}{2ac} \cdot \frac{d\lambda\, \mathfrak{v}_0}{R}. \tag{136a}$$

Die Bestimmung des Rotationsbestandteiles des Vektorpotentiales ist nicht ganz so einfach. Man hat zu berücksichtigen, daß der Vektor $[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$, der hier an die Stelle von $\mathfrak{v}_0$ tritt, für die verschiedenen Punkte des Streifens ein verschiedener ist; denn es ist zwar $\mathfrak{u}$, der Vektor der jeweiligen Drehgeschwindigkeit, bei der Integration über den Streifen als fester Vektor zu betrachten, nicht aber $\mathfrak{r}$, der vom Mittelpunkte nach dem betreffenden Punkte der Oberfläche gezogene Radiusvektor. Letzterer kann geschrieben werden

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} \cdot \frac{a \cos \vartheta}{R} + \mathfrak{t}_1 \cdot a \sin \vartheta,$$

wobei unter $\mathfrak{R}$ der vom Mittelpunkte M des Elektrons nach dem Aufpunkte P gezogene Fahrstrahl, unter $\mathfrak{t}_1$ aber ein zu $\mathfrak{R}$ senkrechter Einheitsvektor zu verstehen ist. Es folgt

$$[\mathfrak{u}\mathfrak{r}] = [\mathfrak{u}\mathfrak{R}] \cdot \frac{a \cos \vartheta}{R} + [\mathfrak{u}\mathfrak{t}_1] \cdot a \sin \vartheta.$$

Bei der Integration über den Streifen ist nun der erste Term als konstant zu betrachten; der zweite Term aber fällt bei der Integration heraus, denn es hat für je zwei Punkte Q und Q' des Streifens, die in derselben durch $\mathfrak{R}$ gelegten Ebene sich befinden (vgl. Abb. 3), $\mathfrak{t}_1$ und daher auch $[\mathfrak{u}\mathfrak{t}_1]$ die entgegengesetzte Richtung. Es geht demnach der Rotationsbestandteil des Vektorpotentiales aus dem Translationsbestandteil (136a) dadurch hervor, daß

$$\left[\mathfrak{u}\mathfrak{R}\right] \frac{a \cos \vartheta}{R}$$

an Stelle von $\mathfrak{v}_0$ tritt. Es wird mit Rücksicht auf (135c)

$$d\mathfrak{A}_2 = \frac{e}{2ac} \cdot \frac{d\lambda}{R} \left[\mathfrak{u}\mathfrak{R}\right] \left\{\frac{R^2 + a^2 - \lambda^2}{2R^2}\right\} \tag{136b}$$

der Beitrag zum Rotationsbestandteile des Vektorpotentiales. Um die Integration nach dem Latenswege λ auszuführen, müssen natürlich die Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{u}$ in ihrer Abhängigkeit von λ gegeben sein. Bei der Integration sind nur solche Werte von λ in Betracht zu ziehen, welche der Bedingung (135) genügen.

B. Volumladung.

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden. a) Punkt im Innern. Dreiecksbildungen aus R, λ, a unmöglich.

$$0 \leqq \lambda \leqq a - R.$$

Die Kugel λ liegt in diesem Falle ganz im Innern des Elektrons. Von zwei benachbarten Kugeln λ und $\lambda + d\lambda$ um P wird die Ladung eingeschlossen

$$4\pi\varrho\,\lambda^2 d\lambda = \frac{3e}{a^3}\lambda^2 d\lambda.$$

Die Division durch λ ergibt als Beitrag zum skalaren Potentiale

$$d\Phi = \frac{3e}{a^3}\lambda d\lambda. \tag{137}$$

Durch Multiplikation mit $\frac{\mathfrak{v}_0}{c}$ entsteht der Beitrag zum Translationsbestandteile des Vektorpotentiales

$$d\mathfrak{A}_1 = \frac{3e}{ca^3}\lambda d\lambda\,\mathfrak{v}_0. \tag{137a}$$

Der Beitrag zum Rotationsbestandteile des Vektorpotentiales ist

$$d\mathfrak{A}_2 = \frac{\lambda\,d\lambda}{c}\cdot\varrho\int d\omega\,[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]\cdot$$

$\mathfrak{r}$, der vom Mittelpunkte M des Elektrons nach der Oberfläche der Kugel λ gezogene Fahrstrahl, kann in zwei Vektoren

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} + \mathfrak{a}$$

zerlegt werden, wo $\mathfrak{R}$, der Vektor MP, vom Mittelpunkte des Elektrons nach dem Mittelpunkte der Kugel λ weist, $\mathfrak{a}$ aber vom Mittelpunkte der Kugel λ nach dem betreffenden Punkte der Oberfläche. Bei der Integration über die Oberfläche fällt der von $\mathfrak{a}$ herrührende Anteil von $[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$ fort, weil für zwei einander diametral gegenüberliegende Punkte der Kugel $\mathfrak{a}$ und mithin auch $[\mathfrak{u}\mathfrak{a}]$ den entgegengesetzten Wert hat. $\mathfrak{R}$ aber ist, ebenso wie $\mathfrak{u}$, bei der Integration über die Kugel konstant zu halten. Es folgt

(137b) $$d\mathfrak{A}_2 = \frac{3e}{ca^3}\lambda\, d\lambda \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{R}]$$

als Beitrag zum Rotationsbestandteil des Vektorpotentiales.

b) Punkt außerhalb oder innerhalb des Elektrons. Dreiecksbildung aus R, λ, a möglich. Alsdann gilt

$$|R-a| \leqq \lambda \leqq R+a.$$

Das ist der Fall, der bei Flächenladung ausschließlich in Betracht kam und auf den Abb. 3 sich bezieht. Es gilt

$$d\Phi = \lambda\, d\lambda\, \varrho\, \omega.$$

Dabei ist

$$\omega = 2\pi(1-\cos\eta)$$

der körperliche Winkel, unter dem das im Innern des Elektrons gelegene Segment (QQ') der Kugel λ vom Mittelpunkte P derselben gesehen wird. Es folgt aus dem Dreieck der Abb. 3

$$2R\lambda\cos\eta = R^2 + \lambda^2 - a^2,$$

daher

$$\omega = 2\pi \cdot \frac{a^2-(R-\lambda)^2}{2R\lambda}$$

und

(138) $$d\Phi = \frac{3e}{4a^3}\, d\lambda \cdot \left\{\frac{a^2-(R-\lambda)^2}{R}\right\}.$$

Dementsprechend wird

(138a) $$d\mathfrak{A}_1 = \frac{3e}{4a^3c}\, d\lambda \cdot \left\{\frac{a^2-(R-\lambda)^2}{R}\right\} \cdot \mathfrak{v}_0.$$

Was den Rotationsbestandteil von $\mathfrak{A}$ anbelangt, der durch den Vektor $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]$ bestimmt ist, so ist es hier notwendig, den von M nach einem Punkte des Segmentes QQ' gezogenen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ in einen zum Fahrstrahl $\mathfrak{R}$ parallelen und einen zu ihm senkrechten Vektor zu zerlegen. Der von dem letzteren herrührende Anteil des Vektorpotentiales fällt bei der Integration über das Segment heraus; man erhält demnach

$$d\mathfrak{A}_2 = \lambda\, d\lambda \frac{\varrho}{c} \cdot \int d\omega \frac{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{R})}{R^2} \cdot [\mathfrak{u}\,\mathfrak{R}].$$

Ist ζ der Winkel, den der nach dem betreffenden Punkte des Segmentes von P aus gezogene Fahrstrahl mit PM einschließt, so ist

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{R}) = R(R - \lambda\cos\zeta),$$

daher

$$\int d\omega(\mathfrak{r}\mathfrak{R}) = 2\pi R\cdot\int_0^\eta \sin\zeta\, d\zeta\,(R - \lambda\cos\zeta)$$

$$= 2\pi R\left\{R(1-\cos\eta) - \frac{\lambda}{2}(1-\cos^2\eta)\right\}\cdot$$

Mit Rücksicht auf den oben gegebenen Wert von $\cos\eta$:

$$\cos\eta = \frac{R^2+\lambda^2-a^2}{2R\lambda},$$

wird

$$\int d\omega(\mathfrak{r}\mathfrak{R}) = 2\pi R\left\{\frac{a^2-(R-\lambda)^2}{2\lambda} - \frac{4\lambda^2R^2-(R^2+\lambda^2-a^2)^2}{8\lambda R^2}\right\}$$

$$= \frac{\pi R}{\lambda}\left\{a^2-(R-\lambda)^2-\lambda^2+\frac{(R^2+\lambda^2-a^2)^2}{4R^2}\right\}.$$

Nach einigen Umformungen ergibt dies

$$\int d\omega(\mathfrak{r}\mathfrak{R}) = \frac{\pi R a^2}{\lambda}\cdot Q,$$

wobei abkürzungsweise gesetzt ist

$$Q = \frac{a^2+2R^2-2\lambda^2}{4R^2} - \frac{(R-\lambda)^3(3R+\lambda)}{4a^2R^2}.$$

Nunmehr ist der Beitrag zum Rotationsbestandteil des Vektorpotentiales zu schreiben

$$(138\text{b})\qquad d\mathfrak{A}_2 = \frac{3e}{4ac}\frac{d\lambda}{R}Q\cdot[\mathfrak{u}\mathfrak{R}].$$

c) P u n k t a u ß e r h a l b d e s E l e k t r o n s. D r e i e c k s b i l d u n g a u s R, λ, a u n m ö g l i c h.

$$R + a \leqq \lambda.$$

In diesem Falle schneidet die um den Aufpunkt mit dem Radius λ geschlagene Kugel das Elektron nicht, sondern sie

schließt es ein. Ein Beitrag zu den Potentialen im Aufpunkt wird nicht beigesteuert.

Es sind demnach bei der Berechnung der elektromagnetischen Potentiale nur die Fälle (a) und (b) heranzuziehen. Die Integration nach λ ist auszuführen, wenn die Bewegung des Elektrons bekannt ist, somit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{v}_0$, und — was allerdings nur für den Rotationsbestandteil des Vektorpotentiales in Betracht kommt — $\mathfrak{u}$ als Funktion von λ gegeben sind.

Die in diesem Paragraphen abgeleiteten Formeln für das Feld eines beliebig bewegten Elektrons sind in allgemeiner Weise zuerst von A. Sommerfeld[1]) aufgestellt worden. Die auf die Translationsbewegung bezüglichen Formeln sind unabhängig von P. Hertz[2]) gefunden worden, auf einem Wege, der im wesentlichen dem hier eingeschlagenen entspricht.

§ 25. Unstetige Bewegung des Elektrons.

Wir gehen jetzt zur Behandlung des Problemes über, welches den Gegenstand der Dissertation von P. Hertz bildete: Ein Elektron bewege sich bis zur Zeit $t = 0$ gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$; zu dieser Zeit soll seine Geschwindigkeit plötzlich auf $\mathfrak{v}_2$ springen und weiterhin wieder nach Richtung und Betrag konstant bleiben. Welches ist das Feld des Elektrons und insbesondere die entsandte Wellenstrahlung? Diese Frage läßt sich vollständig beantworten, wenn man $\mathfrak{v}_2$ parallel $\mathfrak{v}_1$ und beide Geschwindigkeiten kleiner als c annimmt.

Wir legen den Anfangspunkt des Koordinatensystemes in den Punkt des Raumes, der sich zur Zeit $t = 0$ mit dem Mittelpunkte des Elektrons deckt; die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ sollen beide der x-Achse parallel sein. Die im vorigen Paragraphen eingeführte Größe

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2} \tag{139}$$

1) A. Sommerfeld. Gött. Nachr. 1904. S. 99. Siehe auch Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. 1904. S. 346.

2) P. Hertz. Inauguraldissertation: Untersuchungen über unstetige Bewegungen eines Elektrons. Göttingen 1904.

ist die Entfernung eines beliebigen Aufpunktes von demjenigen Punkte, der zur Zeit $t - \frac{\lambda}{c}$ den Mittelpunkt des Elektrons bildete. Es ist

$$(139\text{a}) \qquad \begin{cases} \xi = \beta_1 (l - \lambda) & \text{für} \quad l < \lambda, \\ \xi = 0 & \quad ,, \quad l = \lambda, \\ \xi = \beta_2 (l - \lambda) & \quad ,, \quad l > \lambda. \end{cases}$$

Dabei stellen $c\beta_1$ und $c\beta_2$ die „alte" und die „neue" Geschwindigkeit vor; ihr Vorzeichen gibt an, ob die Bewegung parallel der positiven oder der negativen x-Achse erfolgt. Durch (139, 139a) wird R als Funktion von $x, y, z, ct = l$ und dem Latenswege λ dargestellt.

Wir fassen einen Aufpunkt ins Auge, der zur Zeit t außerhalb des Elektrons liegt. Dieser Punkt liegt dann auch zur Zeit $t - \frac{\lambda'}{c}$ außerhalb des Elektrons, wo λ' den kleinsten in Betracht kommenden Latensweg bezeichnet; in der Tat, verfolgen wir die Bewegung des Elektrons rückwärts, indem wir gleichzeitig die Kugel vom Aufpunkt aus mit Lichtgeschwindigkeit sich dilatieren lassen, so findet zwischen Elektron und Kugel zuerst äußere Berührung statt. Die Kugel überstreicht nun das Elektron, welches sich mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt, nur einmal; zur Zeit $t - \frac{\lambda''}{c}$ tritt sie aus dem Elektron aus; λ'' ist dabei der größte in Betracht kommende Latensweg. Das skalare Potential im Aufpunkt ist nach (136)

$$(140) \qquad \Phi = \frac{e}{2a_0} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{d\lambda}{R} \quad \text{bei Flächenladung.}$$

Die Integrationsgrenzen sind nach (135a, b)

$$(140\text{a}) \qquad \lambda' = R' - a, \quad \lambda'' = R'' + a.$$

Denn zur Zeit $t - \frac{\lambda'}{c}$ lag, wie wir sahen, der Aufpunkt außerhalb des Elektrons; für die Bestimmung der oberen Integrationsgrenze λ'' ist es gleichgültig, ob er außerhalb oder innerhalb des Elektrons liegt. Die Integrationsgrenzen sind die gleichen, wenn es sich um Volumladung handelt; es liegt

dann der Fall (b) des vorigen Paragraphen vor. Nach Gleichung (138) ist

$$\Phi = \frac{3e}{4a^3}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\frac{d\lambda}{R}\left\{a^2-(R-\lambda)^2\right\} \text{ bei Volumladung.} \tag{140b}$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden.

(A) $$l < \lambda' < \lambda''.$$

Hier ist im ganzen Integrationsbereiche λ größer als l; es ist in (139) für ξ der erste der Werte (139a) zu setzen, mithin

$$R = R_1 = \sqrt{(x-\beta_1 l+\beta_1\lambda)^2+y^2+z^2}. \tag{141}$$

Das skalare Potential und das Vektorpotential berechnen sich in diesem Falle so, als ob das Elektron seine alte Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ dauernd behielte.

(B) $$l > \lambda'' > \lambda'.$$

Hier ist im ganzen Integrationsintervalle λ kleiner als l; für ξ ist der letzte der Werte (139a) zu setzen, und daher für R

$$R = R_2 = \sqrt{(x-\beta_2 l+\beta_2\lambda)^2+y^2+z^2}. \tag{141a}$$

Die elektromagnetischen Potentiale entsprechen in diesem Falle der neuen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$.

(C) $$\lambda' < l < \lambda''.$$

Hier hat man das Integrationsintervall in zwei Teilintervalle zu zerlegen; im ersten, wo $\lambda' < \lambda < l$ ist, liegt der dritte, im zweiten, wo $l < \lambda < \lambda''$ ist, der erste der in (139a) zusammengestellten Fälle vor. Demnach ist

$$\Phi = \frac{e}{2a}\int_{\lambda'}^{l}\frac{d\lambda}{R_2}+\frac{e}{2a}\int_{l}^{\lambda''}\frac{d\lambda}{R_1} \tag{141b}$$

das skalare Potential bei Flächenladung, und das Vektorpotential

$$\mathfrak{A}_x = \frac{e}{2a}\int_{\lambda'}^{l}\beta_2\frac{d\lambda}{R_2}+\frac{e}{2a}\int_{l}^{\lambda''}\beta_1\frac{d\lambda}{R_1}. \tag{141c}$$

Bei Volumladung ist entsprechend zu verfahren.

Es liegt nahe, eine neue Variable

$$h = \lambda - R \tag{142}$$

einzuführen. Es ist gemäß (140a)

$$h = -a \text{ für } \lambda = \lambda', \quad h = +a \text{ für } \lambda = \lambda''.$$

Für $\lambda = l$, wo $\xi = 0$, und nach (139)

$$R = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

wird, ist $h = l - r$. Setzen wir noch

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{S}{R},$$

so wird demgemäß

$$\Phi = \frac{e}{2a}\int_{-a}^{+a} \frac{dh}{S_1} \quad \text{im Falle (A)}, \tag{142a}$$

$$\Phi = \frac{e}{2a}\int_{-a}^{+a} \frac{dh}{S_2} \quad \text{im Falle (B)}, \tag{142b}$$

$$\Phi = \frac{e}{2a}\int_{-a}^{l-r} \frac{dh}{S_2} + \frac{e}{2a}\int_{l-r}^{+a} \frac{dh}{S_1} \quad \text{im Falle (C)}. \tag{142c}$$

Das gilt für Flächenladung. Bei Volumladung folgt aus (140b)

$$\Phi = \frac{3e}{4a^3}\int_{-a}^{l-r} \frac{dh\,(a^2-h^2)}{S_2} + \frac{3e}{4a^3}\int_{l-r}^{+a} \frac{dh\,(a^2-h^2)}{S_1} \quad \text{im Falle (C)}. \tag{142d}$$

Es ist noch S zu bestimmen. Aus (139, 139a) und (142) erhalten wir

$$\frac{S}{R} = \frac{dh}{d\lambda} = 1 - \frac{dR}{d\lambda} = \frac{R - \beta(x - \xi)}{R}.$$

Es ist demnach

$$S = R - \beta(x - \beta l + \beta\lambda) = R - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\mathfrak{R}) \tag{143}$$

eine Größe, welche der in Gleichung (69a) eingeführten Größe s entspricht. Je nachdem man $\mathfrak{v}$ gleich $\mathfrak{v}_1$ oder $\mathfrak{v}_2$ setzt und $\mathfrak{R}$ gleich $\mathfrak{R}_1$ oder $\mathfrak{R}_2$, geht S in S_1 oder S_2 über.

Aus (142) und (143) folgt

(143a) $$S = \lambda \varkappa^2 - h - \beta(x - \beta l), \qquad \varkappa^2 = 1 - \beta^2.$$

Zur Auswertung der obigen Integrale ist es erforderlich, S durch x, y, z, l und h auszudrücken; wir haben zu diesem Zwecke noch λ als Funktion jener fünf Größen zu berechnen.

Dies geschieht mit Hilfe der aus (142) sich ergebenden quadratischen Gleichung

$$(\lambda - h)^2 = R^2 = (x - \beta l + \beta \lambda)^2 + y^2 + z^2,$$

aus der man für den Ausdruck (143a) erhält

(143b) $$S = \sqrt{(x - \beta l + \beta h)^2 + \varkappa^2 (y^2 + z^2)};$$

wir haben die positive Wurzel genommen, weil aus (143) folgt, daß bei Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit S stets eine positive Größe ist.

Die Integrale (142a, b) lassen sich nunmehr auswerten. Wir erhalten im Falle (A) für Flächenladung

(144) $$\Phi = \frac{e}{2a\beta_1} \ln \left\{ \frac{x - \beta_1 l + \beta_1 a + \sqrt{(x - \beta_1 l + \beta_1 a)^2 + (1 - \beta_1^2)(y^2 + z^2)}}{x - \beta_1 l - \beta_1 a + \sqrt{(x - \beta_1 l - \beta_1 a)^2 + (1 - \beta_1^2)(y^2 + z^2)}} \right\}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß dieser Ausdruck für das skalare Potential eines gleichförmig bewegten Elektrons mit dem auf ganz anderem Wege in (112e, g) erhaltenen übereinstimmt; es steht hier $x - \beta_1 l$, statt wie dort x, weil hier ein im Raume festes, dort ein mit dem Elektron mitbewegtes Bezugssystem zugrunde gelegt wird. Seiner Ableitung gemäß gilt der Ausdruck (144) für das skalare Potential im Falle (A) außerhalb des flächenhaft geladenen Elektrons. Im Falle (B) tritt nur β_2 an die Stelle von β_1. Herrscht im Falle (A) das „alte", der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ entsprechende Feld, so herrscht im Falle (B) das „neue" Feld, welches einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ entspricht.

Die beiden Gebiete, in denen das Feld sich durch die stationäre Bewegung des Elektrons vor oder nach der unstetigen Änderung seiner Geschwindigkeit bestimmt, werden

offenbar durch eine Wellenzone voneinander getrennt sein, welche durch den Geschwindigkeitssprung hervorgerufen worden ist. Das Gebiet der Welle ist eben dasjenige, in dem der Fall (C) statthat. Es ist hier

$$\lambda' < l < \lambda'',$$

daher

$$-a < l - r < +a;$$

denn es waren $-a$, $l - r$, $+a$ die Werte von h, welche sich den Werten λ', l, λ'' von λ zuordneten, und es ändern sich, da ja S und R stets positiv sind, λ und h stets in demselben Sinne. Bei $l - r = +a$, wo (142c) in (142b) übergeht, liegt die Grenze der Wellenzone gegen das neue Feld; bei $l - r = -a$, wo (142c) in (142a) übergeht, geht die Wellenzone in das alte Feld über. Man hat demnach

für $r > l + a$ das alte Feld,

für $l + a > r > l - a$ die Wellenzone,

für $r < l - a$ das neue Feld.

Die beim Geschwindigkeitssprunge erregte Welle besitzt eine Breite, welche dem Durchmesser $2a$ des Elektrons gleich ist. Sie pflanzt sich von der Sprungstelle des Elektrons aus mit Lichtgeschwindigkeit fort; außerhalb des äußeren Randes der Wellenzone herrscht das alte, innerhalb des inneren Randes das neue Feld.

Unsere Entwickelungen beziehen sich auf einen Aufpunkt, welcher außerhalb des Elektrons liegt. Wenn wir zur Bestimmung des in der Wellenzone herrschenden Feldes die Ausdrücke (142c, d) heranziehen, so setzen wir dabei stillschweigend voraus, daß die Wellenzone über das Elektron bereits hinweggestrichen ist. Da die größte Entfernung eines dem Elektron angehörenden Punktes vom Koordinatenursprung gleich

$$|\mathfrak{v}_2|\, t + a = |\beta_2|\, l + a$$

ist, so muß

$$|\beta_2| l + a < l - a$$

sein, damit das Elektron sich ganz im neuen Felde befinde. Es muß also sein:

$$l > l^*, \quad l^* = \frac{2a}{1 - |\beta_2|}. \tag{145}$$

Dann hat die Wellenzone sich vom Elektron losgelöst und das elektromagnetische Feld der Welle wird durch (142c) im Falle der Flächenladung, durch (142d) im Falle der Volumladung gegeben.

Wir wollen die Feldstärken der Wellenzone unter der Annahme bestimmen, daß die Entfernung derselben von der Sprungstelle des Elektrons bereits groß gegen den Radius des Elektrons geworden ist. Alsdann braucht man bei der Differentiation der Potentialausdrücke (142c, d) nach der Zeit und nach den Koordinaten nur diejenigen Terme zu berücksichtigen, welche durch die Differentiation der Integralgrenze $(l - r)$ entstehen; die übrigen Terme verschwinden gegen diese in dem Maße, wie die Entfernung vom Koordinatenursprung zunimmt. Es wird

$$\left.\begin{aligned} &(146) & \frac{\partial \Phi}{\partial l} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{e}{2 a s_2} - \frac{e}{2 a s_1} \\ &(146\text{a}) & \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial l} &= -\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial r} = \frac{e \beta_2}{2 a s_2} - \frac{e \beta_1}{2 a s_1} \end{aligned}\right\} \text{bei Flächenladung.}$$

Hier sind unter s_1, s_2 die Werte zu verstehen, welche die Größen S_1 und S_2 annehmen, wenn $h = l - r$ gesetzt wird; wir wissen nun, daß diesem Werte von h der Wert l von λ und der Wert r von R sich zuordnet; es ist nach (143)

$$s_1 = r(1 - \beta_1 \cos \varphi), \quad s_2 = r(1 - \beta_2 \cos \varphi), \tag{146b}$$

wo φ den Winkel anzeigt, den der vom Koordinatenursprung aus gezogene Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ mit der x-Achse einschließt. Wir erhalten demnach

$$\left.\begin{aligned} &(146\text{c}) & \frac{\partial \Phi}{\partial l} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{e(\beta_2 - \beta_1)\cos\varphi}{2ar(1 - \beta_1 \cos\varphi)\cdot(1 - \beta_2\cos\varphi)} \\ &(146\text{d}) & \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial l} &= -\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial r} = \frac{e(\beta_2 - \beta_1)}{2ar(1 - \beta_1 \cos\varphi)\cdot(1 - \beta_2\cos\varphi)} \end{aligned}\right\} \text{bei Flächenladung.}$$

Die beiden anderen Komponenten des Vektorpotentiales, sowie die Differentialquotienten von Φ und $\mathfrak{A}_x$ nach Richtungen, welche zum Radiusvektor $\mathfrak{r}$ senkrecht sind, verschwinden.

Man überzeugt sich demgemäß leicht davon, daß die durch (28) und (29) bestimmten Vektoren

$$\mathfrak{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial l}, \quad \mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$

beide senkrecht zum Radiusvektor $\mathfrak{r}$ gerichtet sind; der elektrische Vektor liegt in der durch die x-Achse gelegten Ebene, der magnetische weist senkrecht zu dieser Ebene. Die Beträge der beiden Vektoren sind, bei Flächenladung,

$$(146\mathrm{e}) \qquad |\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{e\,|\beta_2 - \beta_1| \sin\varphi}{2ar(1-\beta_1\cos\varphi)\cdot(1-\beta_2\cos\varphi)}.$$

Das flächenhaft geladene Elektron erzeugt bei dem Geschwindigkeitssprunge eine Welle, längs deren Breite ($2a$) die Feldstärken konstant sind; an den Rändern sind die Feldstärken unstetig.

Im Falle der Volumladung ist die Betrachtung in ganz entsprechender Weise durchzuführen. Aus (142d) folgt

$$(147) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{3e}{4a^3}\cdot\frac{a^2-(l-r)^2}{s_2} - \frac{3e}{4a^3}\cdot\frac{a^2-(l-r)^2}{s_1}$$

und es werden die Beträge der Feldstärken

$$(147\mathrm{a}) \qquad |\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{3e}{4a^3}\cdot\frac{|\beta_2-\beta_1|\sin\varphi\,\{a^2-(l-r)^2\}}{r(1-\beta_1\cos\varphi)\cdot(1-\beta_2\cos\varphi)}.$$

Das gleichförmig über sein Volum geladene Elektron erzeugt bei seinem Geschwindigkeitssprunge eine Welle, in der von der Mitte ($l = r$) die Feldstärken stetig gegen die Ränder ($l - r = \pm a$) hin abnehmen. An den Rändern sind die Feldstärken null, sie gehen demnach stetig in die Feldstärken der stationären Felder über, die in den betrachteten Entfernungen vom Elektron gleichfalls verschwinden.

Vertauscht man die Reihenfolge der beiden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, indem man jetzt annimmt, daß die Geschwindigkeit, statt von $\mathfrak{v}_1$ auf $\mathfrak{v}_2$, von $\mathfrak{v}_2$ auf $\mathfrak{v}_1$ springt, so kehren die Differentialquotienten (146, 146a, 147) der elektro-

magnetischen Potentiale das Zeichen um. Es wechseln mithin die Feldstärken die Richtung, ohne jedoch ihren Betrag zu ändern. Die Dichten der Energie und der Bewegungsgröße in der Wellenzone bleiben bei dieser Vertauschung der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ ungeändert. Hieraus folgt das von P. Hertz aufgestellte „Vertauschungsgesetz“: Vertauscht man die Reihenfolge der bei dem Geschwindigkeitssprunge in Betracht kommenden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, so bleibt die ausgestrahlte Energie und der ausgestrahlte Impuls ungeändert.

Wir könnten die Energie W_{12} und den Impuls $\mathfrak{G}_{12}$, der bei dem Geschwindigkeitssprunge ausgestrahlt wird, durch Integration über die ganze Wellenzone auf Grund der Formeln (146e) und (147a) berechnen. Indessen läßt sich gerade auf das Vertauschungsgesetz eine einfachere Methode der Berechnung gründen.[1])

Wir denken uns zunächst ein Elektron, das vorher mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ gleichförmig bewegt war, plötzlich gehemmt. Es wird dann eine Welle von der Breite $2a$ in den Raum hinaussenden; nach der Auffassung J. J. Thomsons (vgl. § 14 Schluß) würde dieses die Art sein, wie beim Aufprall der Kathodenstrahlen auf die Antikathode die Röntgenstrahlen entstehen. Es sei nun W_1 die Energie des gleichförmig bewegten Elektrons. Nach der plötzlichen Hemmung kann sich die gesamte Energie des Feldes nicht ändern, da ja die elektromagnetische Kraft an dem ruhenden Elektron keine Arbeit leistet. Wartet man so lange, bis die Entfernung der Wellenzone vom Elektron groß gegen den Radius des Elektrons geworden ist, so ist die Feldenergie gleich der Summe aus der elektrostatischen Energie W_0 des Elektrons und der in der Wellenzone enthaltenen Energie W_{10}. Es ist

$$W_{10} = W_1 - W_0, \tag{148}$$

d. h. die ausgestrahlte Energie ist gleich dem Überschusse der Energie des bewegten Elektrons über

1) P. Hertz. Physik. Zeitschr. 4, S. 848, 1903. Dissertation S. 53, 1904.

diejenige des ruhenden. Im Falle der Flächenladung folgt aus (113b)

$$W_{10} = \frac{e^2}{2a} \left\{ \frac{1}{\beta_1} ln \left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1} \right) - 2 \right\}, \tag{148a}$$

ein Ausdruck, der im Falle der Volumladung mit $^6/_5$ zu multiplizieren ist.

Betrachten wir jetzt den umgekehrten Fall, daß das Elektron plötzlich in Bewegung gesetzt wird. Es ist das ein Vorgang, der möglicherweise bei der Emission der Radiumstrahlen angenähert realisiert ist. Dieser Fall geht durch Vertauschung der Geschwindigkeiten 0 und $\mathfrak{v}_1$ aus dem soeben erledigten hervor. Es folgt demnach aus dem Vertauschungsgesetz

$$W_{01} = W_1 - W_0 = \frac{e^2}{2a} \left\{ \frac{1}{\beta_1} ln \left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1} \right) - 2 \right\} \tag{148b}$$

für die Energie der ausgesandten Wellenstrahlung. Wir sehen also: Wird ein Elektron plötzlich in Bewegung gesetzt, so ist die Energie der entsandten Wellenstrahlung gleich dem Überschusse der vom Elektron mitgeführten Energie über seine elektrostatische Energie.

Wir wenden uns jetzt dem allgemeinen Falle zu, indem wir von der für unser starres Elektron allgemein gültigen Relation (97) ausgehen. Da Rotationen hier nicht angenommen werden, so ist

$$\frac{dW}{dt} = \left(\mathfrak{v} \frac{d\mathfrak{G}}{dt} \right)$$

die Aussage jener aus dem Energiesatz und dem Impulssatz abgeleiteten Beziehung. Wir integrieren von der Zeit $t = 0$ des Sprunges bis zu einer Zeit t, zu der die Welle sich bereits weit von dem Elektron entfernt hat. Es wird, da ja in diesem Zeitintervall die Geschwindigkeit konstant gleich $\mathfrak{v}_2$ sein soll,

$$\int_0^t dt \frac{dW}{dt} = \mathfrak{v}_2 \int_0^t dt \frac{d\mathfrak{G}}{dt}.$$

Zur Zeit 0 waren W_1, $\mathfrak{G}_1$ Energie und Impuls des Feldes, zur Zeit t sind die Gesamtwerte von Energie und Impuls

$$W_2 + W_{12} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_{12}.$$

Es ist somit

$$(149) \qquad W_{12} + W_2 - W_1 = \mathfrak{v}_2 \cdot \{\mathfrak{G}_{12} + \mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1\}.$$

Nach dem Vertauschungsgesetz ist nun für den umgekehrten Fall eines Sprunges von $\mathfrak{v}_2$ auf $\mathfrak{v}_1$

$$W_{21} = W_{12}, \quad \mathfrak{G}_{21} = \mathfrak{G}_{12}.$$

Es folgt also durch Vertauschung von $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ aus (149)

$$(149\text{a}) \qquad W_{12} + W_1 - W_2 = \mathfrak{v}_1 \cdot \{\mathfrak{G}_{12} + \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2\}.$$

In dem Falle, wo $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ parallel sind, kann man aus (149) und (149a) die ausgestrahlte Energie und die ausgestrahlte Bewegungsgröße berechnen. Nach Symmetrie sind hier die Vektoren $\mathfrak{G}_{12}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ den genannten Vektoren parallel; wir verstehen unter G_{12}, G_1, G_2 ihre Beträge, mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen, je nachdem die Vektoren in Richtung der x-Achse oder in die entgegengesetzte Richtung weisen.

Aus den Gleichungen

$$W_{12} + W_2 - W_1 = c\beta_2 \{G_{12} + G_2 - G_1\}$$
$$W_{12} + W_1 - W_2 = c\beta_1 \{G_{12} + G_1 - G_2\}$$

folgt durch Elimination von W_{12} oder G_{12}

$$(149\text{b}) \qquad G_{12} = \frac{2(W_2 - W_1)}{c(\beta_2 - \beta_1)} - \frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}(G_2 - G_1)$$

$$(149\text{c}) \qquad W_{12} = \frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}(W_2 - W_1) - 2c\beta_1\beta_2 \frac{G_2 - G_1}{\beta_2 - \beta_1}.$$

Es bestimmen sich also die Energie und Bewegungsgröße, welche bei einem ohne Richtungsänderung stattfindenden Geschwindigkeitssprunge ausgestrahlt werden, aus den in (113a, b) angegebenen Werten für die Energie und die Bewegungsgröße eines gleichförmig bewegten Elektrons.

Durch Einführung dieser Werte folgt für die ausgestrahlte Energie der allgemein gültige Ausdruck:

$$(149\text{d})\qquad W_{12}=\frac{e^2}{2a}\left\{\left(\frac{1-\beta_1\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\right)ln\left(\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}\cdot\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}\right)-2\right\}.$$

Derselbe geht, für $\beta_2=0$, in (148b) über. Aus (149b) folgt als Wert der ausgestrahlten Bewegungsgröße bei plötzlicher Hemmung oder plötzlicher Fortschleuderung:

$$G_{01}=G_{10}=\frac{2(W_1-W_0)}{c\beta_1}-G_1.$$

Da nun, nach (103),

$$c\beta_1 G_1=2T_1$$

ist, und

$$W_1-W_0=U_1+T_1-U_0,$$

so wird (vgl. 113c)

$$(149\text{e})\qquad G_{01}=G_{10}=\frac{2(U_1-U_0)}{c\beta_1}=\frac{e^2}{2ac\beta_1}\left\{\frac{3-\beta_1^2}{2\beta_1}ln\left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right)-3\right\}.$$

Im Falle der Volumladung sind die Ausdrücke (149d, e), wie die für W_1, W_2, G_1, G_2 geltenden, mit dem Faktor 6/5 zu multiplizieren.

Bei instantaner Reflexion, wo

$$\beta_2=-\beta_1,\ G_2=-G_1,\ W_2=W_1$$

zu setzen ist, erhält man aus (149c)

$$(149\text{f})\qquad W_{12}=2c\beta_1 G_1=4T_1$$

und aus (149b)

$$(149\text{g})\qquad G_{12}=0.$$

Im Falle instantaner Reflexion ist der ausgestrahlte Impuls gleich Null. Die ausgestrahlte Energie ist gleich der vierfachen magnetischen Energie des gleichförmig bewegten Elektrons.

Man kann von vornherein zweifeln, ob ein plötzlicher Geschwindigkeitssprung überhaupt durch endliche Kräfte zu verwirklichen ist. Auch diese Frage ist von P. Hertz in Unter-

suchung[1]) gezogen worden; es hat sich ergeben, daß die resultierende äußere Kraft $\mathfrak{K}^a$, welche erforderlich ist, um das Elektron, von der Ruhe aus, plötzlich auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ zu bringen und in dieser zu halten, für $|\mathfrak{v}_1| \leqq c$ in jedem Momente eine endliche ist. Diese Kraft ist nicht, wie die Stoßkraft der gewöhnlichen Mechanik, eine unendliche Kraft, welche nur im Augenblick des Stoßes wirkt, sondern sie verteilt sich über das Zeitintervall $0 \leqq t \leqq t^*$, wo t^* der Zeitpunkt ist, wo das Elektron gerade aus der Wellenzone heraustritt. Diesen Zeitpunkt haben wir in (145) berechnet; er ist

$$t^* = \frac{2a}{c - |\mathfrak{v}_1|}, \tag{150}$$

wenn

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 \quad \text{für} \quad t > 0.$$

Daß die über jenes Intervall erstreckten Zeitintegrale der Kraft $\mathfrak{K}^a$ und der Arbeitsleistung $\mathfrak{v}\mathfrak{K}^a$ endlich sind, folgt ohne weiteres aus den obigen Resultaten. Von der Zeit t^* an ist das Elektron von dem stationären, der gleichförmigen Bewegung entsprechenden Felde umgeben, so daß zur Aufrechterhaltung der Bewegung keine Kraft mehr erforderlich ist. Von jetzt an sind Energie und Bewegungsgröße des Feldes konstant; sie haben die Werte

$$W_1 + W_{01} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_{01},$$

welche sich nach einiger Zeit in dem Felde des gleichförmig bewegten Elektrons und in der entsandten Welle vorfinden.

Es folgt demnach, mit Rücksicht auf (148b),

$$\int_0^{t^*} (\mathfrak{v}\,\mathfrak{K}^a)\,dt = W_{01} + W_1 - W_0 \tag{150a}$$
$$= 2\,(W_1 - W_0) = \frac{e^2}{a}\left\{\frac{1}{\beta_1} ln\left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right) - 2\right\}.$$

Die gesamte Arbeit bei plötzlicher Fortschleuderung ist doppelt so groß, als wenn die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ auf quasistationäre Weise erreicht worden wäre.

Da in dem Zeitintervalle $0 < t < t^*$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ konstant gleich $\mathfrak{v}_1$ ist, so ist das Zeitintegral der äußeren Kraft

1) P. Hertz. Physik. Zeitschrift (5), 1904, S. 109. Diss. S. 60.

dem Betrage nach gleich dem durch die Geschwindigkeit geteilten Zeitintegral der Arbeit:

$$\int_0^{t^*} \mathfrak{K}^a dt = \frac{\mathfrak{v}_1}{|\mathfrak{v}_1|^2} \cdot 2\,(W_1 - W_0),$$

mithin

$$\int_0^{t^*} \mathfrak{K}^a dt = \mathfrak{v}_1 \cdot \frac{e^2}{a c^2 \beta_1^2} \left\{ \frac{1}{\beta_1} ln \left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1} \right) - 2 \right\}. \tag{150b}$$

Der Impuls und die Arbeit der äußeren Kraft haben beide einen endlichen Wert, wofern die Geschwindigkeit, die hervorgerufen wird, kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Geht man nun zur Grenze der Lichtgeschwindigkeit über, so werden allerdings, den Gleichungen (150a, b) zufolge, die Zeitintegrale der Kraft und der Arbeit beide unendlich. Es ist aber zu beachten, daß dabei nach (150) die obere Grenze der Integrale, d. h. die Zeit, zu der die Welle das Elektron überstrichen hat, ins Unendliche wächst. Und hierdurch allein wird das Unendlichwerden der Zeitintegrale bedingt, wie P. Hertz gezeigt hat. Zu jeder endlichen Zeit nach dem Stoße bleiben auch bei Erreichung der Lichtgeschwindigkeit die Kraft, der Impuls und die Energie endlich.

Unsere Dynamik des Elektrons schließt also keineswegs die Möglichkeit aus, daß in der Natur mit Lichtgeschwindigkeit bewegte Elektronen vorkommen, sei es, daß wir die Annahme der Flächenladung, oder diejenige der Volumladung bevorzugen. Freilich liegen in diesem singulären Falle sehr verwickelte Verhältnisse vor. Da das Elektron sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt, wie die Wellen, die es bei Erreichung seiner Geschwindigkeit entsandt hat, so kann man hier die Wellenstrahlung von der Konvektionsstrahlung nicht sondern. Man muß beide gemeinsam betrachten, und die Energie und die Bewegungsgröße des gesamten Feldes in Rechnung ziehen. — Auf den Fall der Überlichtgeschwindigkeit kommen wir weiter unten in § 27 zurück.

§ 26. Die innere Kraft eines beliebig bewegten Elektrons.

Wir haben in § 24 die elektromagnetischen Potentiale eines beliebig bewegten kugelförmigen Elektrons durch Integrale nach dem Latenswege dargestellt. Der direkteste Weg zur Berechnung der inneren Kräfte wäre der, aus jenen Formeln das Feld und den Vektor $\mathfrak{F}$ zu bestimmen, und durch Integration über das Volumen des Elektrons die innere Kraft und Drehkraft zu ermitteln. Es ist A. Sommerfeld[1]) gelungen, die Schwierigkeiten, die sich der Beschreitung dieses Weges entgegenstellen, zu überwinden.

Die Verknüpfung des durch die Grundgleichung V gegebenen Vektors $\mathfrak{F}$, der elektromagnetischen Kraft pro Einheit der Ladung, mit den elektromagnetischen Potentialen ist leicht zu finden. Nach (28) und (29) ist

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\ \mathrm{curl}\ \mathfrak{A}].$$

Führen wir ein Bezugssystem ein, welches die translatorische Bewegung des Elektrons mitmacht, so ist nach Bd. I, Gleichung 116

$$\frac{\partial'\mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}_0\nabla)\,\mathfrak{A}$$

die von diesem Bezugssystem aus beurteilte zeitliche Änderung des Vektors $\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{v}_0$, die Geschwindigkeit des Mittelpunktes des Elektrons, vom Orte überhaupt nicht abhängt, so folgt aus Regel (ν) der Formelzusammenstellung in Bd. I, S. 438

$$\nabla(\mathfrak{v}_0\mathfrak{A}) = (\mathfrak{v}_0\nabla)\,\mathfrak{A} + [\mathfrak{v}_0\ \mathrm{curl}\ \mathfrak{A}].$$

Es ist demnach

$$\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial'\mathfrak{A}}{\partial t} - \nabla(\mathfrak{v}_0\mathfrak{A}) + [\mathfrak{v}_0\ \mathrm{curl}\ \mathfrak{A}].$$

Führen wir dieses in den Ausdruck des Vektors $\mathfrak{F}$ ein und setzen an Stelle von t wieder die Variable $l = ct$, so er-

1) A. Sommerfeld. Gött. Nachr. 1904, S. 363—439. Akad. van Wetensch. te Amsterdam, 1904. S. 346 der englischen Ausgabe.

halten wir unter Beachtung der kinematischen Grundgleichung (VII):

(151) $$\mathfrak{F} = -\nabla\Psi - \frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial l} + \frac{1}{c}\left[[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\operatorname{curl}\mathfrak{A}\right].$$

Der hier auftretende Skalar

(151a) $$\Psi = \Phi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{A})$$

geht bei gleichförmiger Translationsbewegung in das Konvektionspotential über, als dessen negativer Gradient sich bei einer solchen Bewegung der Vektor $\mathfrak{F}$ darstellt.

Wir wollen uns mit einer beliebigen rotationslosen Bewegung des Elektrons beschäftigen. Hier ergibt (151)

(151b) $$\mathfrak{F} = -\nabla\Psi - \frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial l}.$$

Im Falle gleichförmiger Volumladung bestimmt sich hieraus die innere Kraft

(152) $$\mathfrak{K} = \frac{3e}{4\pi a^3}\int \mathfrak{F}\,dv$$

folgendermaßen:

(152a) $$-\mathfrak{K} = \frac{3e}{4\pi a^3}\int dv\left\{\nabla\Psi + \frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial l}\right\}.$$

Im Falle der Flächenladung muß man bei der Berechnung der inneren Kraft vorsichtiger zu Werke gehen; es sind nämlich die räumlichen und zeitlichen Differentialquotienten der Potentiale an der geladenen Fläche nicht stetig. Man berechnet daher zunächst die Kraft, welche das Elektron auf eine geladene Kugel vom Radius $b \gtrless a$ ausübt, und geht erst nach Auswertung dieser Kraft zur Größe $b = a$ über. Diese Ableitung der inneren Kraft eines flächenhaft geladenen Elektrons

(152b) $$\mathfrak{K} = \lim_{b=a}\frac{e}{4\pi b^2}\int \mathfrak{F}\,df$$

führt zu dem Ausdrucke

(152c) $$-\mathfrak{K} = \lim_{b=a}\frac{e}{4\pi b^2}\int df\left\{\nabla\Psi + \frac{\partial' \mathfrak{A}}{\partial l}\right\}.$$

Wie wir wissen (vgl. § 24), lassen sich die elektromagnetischen Potentiale des Elektrons durch einfache, nach dem Latenswege genommene Integrale darstellen. Wir wollen schreiben

$$\Phi = e\int_0^\infty \chi \, d\lambda. \tag{153}$$

Dann wird, bei reiner Translationsbewegung,

$$\mathfrak{A} = \frac{e}{c}\int_0^\infty \chi \, \mathfrak{v}_{l-\lambda} \, d\lambda, \tag{153a}$$

und, gemäß (151a),

$$\Psi = e\int_0^\infty \chi \left\{1 - \frac{\mathfrak{v}_l \mathfrak{v}_{l-\lambda}}{c^2}\right\} d\lambda. \tag{153b}$$

Diese Ausdrücke sollen nun in (152a, c) eingeführt werden, und es soll die Integration über das Volumen v, bzw. die Fläche f vorgenommen werden. Es seien χ_1 bzw. χ_2 die Werte, welche der in (153) auftretenden Größe χ im Falle der Flächenladung bzw. der Volumladung zuzuschreiben sind. Wir setzen dann

$$\bar{\chi}_1 = \frac{1}{4\pi b^2}\int \chi_1 \, df \tag{153c}$$

$$\bar{\chi}_2 = \frac{3}{4\pi a^3}\int \chi_2 \, dv. \tag{153d}$$

Diese Mittelwerte von χ in (152a c) einführend, erhalten wir im Falle der Flächenladung

$$-\frac{1}{e^2}\cdot \mathfrak{K} = \operatorname*{Lim}_{b=a}\int_0^\infty d\lambda \left\{1 - \frac{\mathfrak{v}_l \mathfrak{v}_{l-\lambda}}{c^2}\right\} \nabla_T \bar{\chi}_1 + \operatorname*{Lim}_{b=a} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial l}\int_0^\infty d\lambda \, \mathfrak{v}_{l-\lambda} \bar{\chi}_1, \tag{154}$$

hingegen im Falle der Volumladung

$$-\frac{1}{e^2}\cdot \mathfrak{K} = \int_0^\infty d\lambda \left\{1 - \frac{\mathfrak{v}_l \mathfrak{v}_{l-\lambda}}{c^2}\right\} \nabla_T \bar{\chi}_2 + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial l}\int_0^\infty d\lambda \, \mathfrak{v}_{l-\lambda} \bar{\chi}_2. \tag{154a}$$

Hierbei verstehen wir unter $\mathfrak{T}$ den Fahrstrahl, der von irgendeinem im Raume festen Punkte nach dem Mittelpunkte

des Elektrons in seiner zur Zeit $t = \frac{l}{c}$ eingenommenen Lage gezogen ist. Den in (154) und (154a) eingehenden Gradienten von $\bar{\chi}$ erhält man, indem man die durch ∇_T angedeutete Verrückung des Mittelpunktes vornimmt und dabei l und λ konstant hält.

Um diese Ausdrücke der resultierenden inneren Kraft auszuwerten, ist die in (153) eingehende Funktion χ von λ nach den Angaben des § 24 zu berechnen, und es sind die durch (153c, d) angedeuteten Integrationen über die Ausdehnung des Elektrons auszuführen. Es kommen dabei nur solche Werte von λ in Betracht, für welche die um den betreffenden Aufpunkt gelegte Kugel vom Radius λ das Elektron in seiner zur Zeit $\frac{l-\lambda}{c}$ eingenommenen Lage schneidet. Im Falle der Flächenladung ist die Bedingung hierfür die in (135) angegebene: Es muß eine Dreiecksbildung aus den drei Strecken R, λ, a möglich sein. Nach (136) ist dann die in (153) eingeführte Größe χ gleich $\frac{1}{2aR}$; sie ist gleich Null, wenn keine Dreiecksbildung aus jenen drei Strecken möglich ist. Nun kann ein und derselbe Aufpunkt für die vorgegangenen Lagen des Elektrons bald ein innerer und bald ein äußerer sein, so daß die Grenzen, innerhalb deren χ von Null verschieden ist, durch (135b) bzw. durch (135a) gegeben werden. Auch sind alle zur Zeit t vom Elektron bedeckten Aufpunkte in Betracht zu ziehen. Hiernach wären zur Bestimmung von $\bar{\chi}$ bereits bei Flächenladung sehr umständliche Fallunterscheidungen notwendig; unter Annahme von Volumladung wären dieselben noch zahlreicher.

Diese Fallunterscheidungen vermeidet nun Sommerfeld durch einen Kunstgriff; er stellt die verschiedenen Wertemöglichkeiten von χ durch einen einheitlichen analytischen Ausdruck dar, nach Art des Dirichletschen diskontinuierlichen Faktors. Bekanntlich[1]) ist

$$\int_0^\infty \sin sx \frac{ds}{s} = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad x \gtrless 0.$$

1) Vgl. Riemann-Weber. Die part. Diffgl. d. math. Phys. I, § 13, S. 29.

Betrachten wir jetzt das Produkt

$$4 \sin s a \cdot \sin s R \cdot \sin s \lambda = \sin s (a + R - \lambda) + \sin (a - R + \lambda) - \sin s (a + R + \lambda) - \sin s (a - R - \lambda).$$

Von den vier Größen

$$a + R - \lambda, \quad a - R + \lambda, \quad -a - R - \lambda, \quad -a + R + \lambda$$

sind drei positiv und nur eine ist negativ, falls Dreiecksbildung aus den drei Strecken a, R, λ möglich ist; ist hingegen die Dreiecksbildung nicht möglich, weil eine der drei Strecken größer ist als die Summe der beiden anderen, so sind von den vier Größen zwei positiv und zwei negativ. Das Integral

$$\int_0^\infty \sin s a \cdot \sin s R \cdot \sin s \lambda \cdot \frac{ds}{s}$$

ist mithin gleich $\frac{\pi}{4}$ oder gleich Null, je nachdem eine Dreiecksbildung möglich ist oder nicht. Wir können daher im Falle der Flächenladung die Größe χ durch dieses Integral ausdrücken:

$$\chi_1 = \frac{2}{\pi a} \int_0^\infty \sin s a \cdot \sin s \lambda \cdot \frac{\sin s R}{R} \cdot \frac{ds}{s}, \tag{155}$$

so daß das skalare Potential (153) wird

$$\Phi = \frac{2e}{\pi a} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty \sin s a \sin s \lambda \frac{\sin s R}{R} \frac{ds}{s}. \tag{155a}$$

Was den Fall der Volumladung anbelangt, so können wir ihn leicht auf denjenigen der Flächenladung zurückführen, indem wir die Kugel vom Radius a in Kugelschichten zerlegen, vom Radius r, von der Dicke dr und der Ladung $4\pi \varrho r^2 dr = \frac{3e}{a^3} r^2 dr$. Schreiben wir in (155a) statt a jetzt r, statt e jetzt $\frac{3e}{a^3} r^2 dr$, so entsteht durch Integration nach r das

skalare Potential des gleichförmig über sein Volumen geladenen Elektrons:

$$\Phi = \frac{6e}{\pi a^3}\int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_0^\infty \sin s\lambda \frac{\sin sR}{R}\frac{ds}{s}\int\limits_0^a r \sin sr\, dr.$$

Da nun gilt

$$\int\limits_0^a r \sin sr\, dr = \frac{\sin sa - sa\cos sa}{s^2},$$

so wird im Falle der Volumladung

$$(155\text{b})\qquad \Phi = \frac{6e}{\pi a}\int\limits_0^\infty d\lambda \int\limits_0^\infty \sin s\lambda \frac{\sin sR}{R}\left\{\frac{\sin sa - sa\cos sa}{(sa)^2}\right\}\frac{ds}{s}.$$

In diesem Falle ist der Größe χ der Wert zuzuschreiben

$$(155\text{c})\qquad \chi_2 = \frac{6}{\pi a}\int\limits_0^\infty \sin s\lambda \frac{\sin sR}{R}\left\{\frac{\sin sa - sa\cos sa}{(sa)^2}\right\}\frac{ds}{s}.$$

In den drei in § 24 unterschiedenen Lagen des Aufpunktes muß $e\chi_2 d\lambda$ die Werte (137), (138) und Null annehmen. Die gefundenen einheitlichen analytischen Ausdrücke gestatten es, ohne weiteres die zur Berechnung der Mittelwerte $\bar{\chi}_1$, $\bar{\chi}_2$ erforderlichen Integrationen über die Oberfläche bzw. über das Volumen des Elektrons auszuführen.

Wir verstehen unter N (Abb. 4) den Ort des Mittelpunktes des Elektrons zur Zeit t, unter M seinen Ort zur Zeit $t - \frac{\lambda}{c}$. Um N schlagen wir eine Kugel mit dem Radius b. Über diese Kugel ist χ_1 zu integrieren, um den durch (153c) definierten Mittelwert zu berechnen. Es sollte $\mathfrak{T}$ der von einem beliebig gewählten, aber dann festgehaltenen Raumpunkte aus nach N gezogene Fahrstrahl sein. Wir wählen M als diesen festen Punkt, so daß T, der Betrag von $\mathfrak{T}$, durch die Strecke MN vorgestellt wird. R bezeichnet nach wie vor den Radiusvektor, der von M aus nach dem Punkte gezogen ist, für welchen Φ bzw. χ berechnet werden soll; das ist hier

ein Punkt P auf der Oberfläche der Kugel vom Radius b. Ist endlich ζ der Winkel, welcher in dem Dreieck aus den Strecken R, T, b, der Seite R gegenüberliegt, so gilt

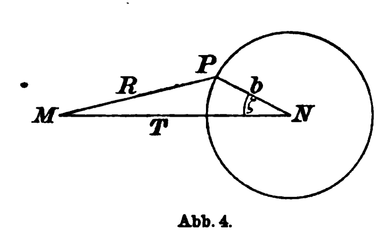


Abb. 4.

$$2b\,T\cos\zeta = T^2 + b^2 - R^2.$$

Schreitet man längs der Kugelfläche fort, so sind T und b konstant zu halten; es folgt

$$b\,T\sin\zeta\,d\zeta = R\,d\,R.$$

Demnach ist der Flächeninhalt eines von zwei Breitenkreisen ζ und $\zeta + d\zeta$ begrenzten Streifens

$$d\,f = 2\pi b^2 \sin\zeta\,d\,\zeta = \frac{2\pi\,b\,R\,d\,R}{T}.$$

Da nun längs eines solchen Streifen nach (155) die Größe χ_1 konstant ist, so können wir für den Mittelwert (153c) schreiben:

$$\bar{\chi}_1 = \frac{1}{2Tb}\cdot\int\limits_{|T-b|}^{T+b} \chi_1 R\,d\,R. \tag{156}$$

Diese Grenzbestimmung gilt sowohl dann, wenn M innerhalb, wie auch dann, wenn M außerhalb der Kugel vom Radius b liegt. Aus (155) und (156) folgt jetzt

$$\bar{\chi}_1 = \frac{1}{\pi T a b}\cdot\int\limits_0^\infty \mu \sin s a \sin s\lambda \frac{ds}{s},$$

wenn abkürzungsweise gesetzt wird

$$\mu = \int\limits_{|T-b|}^{T+b} d\,R\sin sR = \frac{1}{s}\Big\{\cos s\,(T-b) - \cos s\,(T+b)\Big\};$$

es findet sich

$$\mu = \frac{2}{s}\cdot\sin s\,T\cdot\sin s b,$$

so daß man schließlich erhält

$$(156\text{a})\qquad \bar{\chi}_1 = \frac{2}{\pi a b}\int_0^\infty \sin sa \sin sb \frac{\sin sT}{T} \sin s\lambda \frac{ds}{s^2}.$$

Für unser kugelförmiges Elektron läßt sich auch im Falle der Volumladung die durch (153d) postulierte Mittelwertsbildung ohne Schwierigkeit durchführen. In dem Ausdruck (155c) von χ_2 ist es nur der Faktor $\frac{\sin sR}{R}$ des Integranden, der für die verschiedenen Punkte des Elektrons einen verschiedenen Wert hat. Der Mittelwert dieses Faktors berechnet sich nun für das Volumen der Kugel in ganz ähnlicher Weise, wie oben für die Kugelfläche. Es ist

$$\frac{3}{4\pi a^3}\int \frac{\sin sR}{R}\, dv = \frac{3}{2a^3 T}\int_0^a r\,dr \cdot \int_{|T-r|}^{T+r} \sin sR\, dR$$

$$= \frac{3}{a^3}\cdot\frac{\sin sT}{sT}\cdot\int_0^a \sin sr \cdot r\,dr = \frac{3}{a}\cdot\frac{\sin sT}{sT}\cdot\left\{\frac{\sin sa - sa\cos sa}{(sa)^2}\right\}.$$

Demnach erhalten wir

$$(156\text{b})\qquad \bar{\chi}_2 = \frac{18}{\pi a^2}\int_0^\infty \sin s\lambda \frac{\sin sT}{T}\left\{\frac{\sin sa - sa\cos sa}{(sa)^2}\right\}^2 \frac{ds}{s^2}.$$

Indem wir die so erhaltenen Mittelwerte (156a, b) von χ in die allgemeinen Ansätze (154) und (154a) für die innere Kraft einführen, gelangen wir zu den Sommerfeldschen Formeln

$$(157)\qquad -\frac{\pi a}{2e^2}\cdot \mathfrak{K}$$

$$= \lim_{b=a} \frac{1}{b}\int_0^\infty d\lambda \left\{1 - \frac{\mathfrak{v}_l \mathfrak{v}_{l-\lambda}}{c^2}\right\}\frac{\mathfrak{T}}{T}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\sin sa \sin sb \sin s\lambda \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\sin sT}{T}\right)$$

$$+ \lim_{b=a} \frac{1}{bc}\frac{\partial}{\partial l}\int_0^\infty d\lambda\, \mathfrak{v}_{l-\lambda}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\sin sa \sin sb \sin s\lambda \frac{\sin sT}{T}.$$

(157a)
$$-\frac{\pi a^2}{18 e^2}\cdot \mathfrak{K}$$

$$=\int_0^\infty d\lambda\left\{1-\frac{\mathfrak{v}_l \mathfrak{v}_{l-\lambda}}{c^2}\right\}\frac{\mathfrak{T}}{T}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\left\{\frac{\sin sa - sa\cos sa}{(sa)^2}\right\}^2 \sin s\lambda \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\sin sT}{T}\right)$$

$$+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial l}\int_0^\infty d\lambda\, \mathfrak{v}_{l-\lambda}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\left\{\frac{\sin sa - sa\cos sa}{(sa)^2}\right\}^2 \sin s\lambda\, \frac{\sin sT}{T}.$$

Diese Formeln stellen die vom kugelförmigen, rein translatorisch bewegten Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft im Falle homogener Flächenladung und homogener Volumladung in allgemeinster Weise dar.

In seiner Mitteilung in den Göttinger Nachrichten hat Sommerfeld die Integrationen nach s ausgeführt; dabei gelangt der in § 17 erwähnte Umstand zur analytischen Formulierung, daß die innere Kraft durch die Bewegung des Elektrons in einem endlichen, dem betrachteten Zeitpunkte unmittelbar vorangegangenen Intervalle bestimmt ist, wenigstens dann, wenn die Bewegung dauernd mit Unterlichtgeschwindigkeit oder mit Überlichtgeschwindigkeit erfolgt ist. Ausnahmefälle treten dann ein, wenn das Elektron sich zuerst mit Überlichtgeschwindigkeit und dann mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt, oder gar die Richtung umkehrt; dann können offenbar Wellen, die vom Elektron selbst in einer längst vergangenen Epoche entsandt worden sind, eine Kraft auf dasselbe ausüben. Alle denkbaren Fälle werden durch die obigen Formeln in einen einheitlichen analytischen Ausdruck zusammengefaßt, so daß die Ermittelung der inneren Kraft für eine gegebene Bewegung nur noch eine Sache der Rechnung ist.

Sommerfeld hat auch die Drehkraft und die Rotationsbewegung in entsprechender Weise behandelt. Von größerem Interesse ist jedoch die Anwendung auf translatorische Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit[1]), der wir uns jetzt zuwenden wollen.

1) A. Sommerfeld. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. 13. S. 431.

§ 27. Gleichförmige Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit.

Bei gleichförmiger geradliniger Bewegung wird

$$\mathfrak{v}_r = \mathfrak{v}_{l-\lambda} = c\beta, \quad T = \beta\lambda.$$

In den Ausdrücken (157) und (157a) für die innere Kraft fallen die Differentialquotienten nach l fort. Die Differentiationen nach T können durch solche nach λ ersetzt werden, so daß nach Umkehr der Integrationsordnung für die der Bewegung parallel gerechnete innere Kraft bei Flächenladung folgt

$$(158) \qquad -\frac{\pi a}{2 e^2}\mathfrak{K}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \cdot \operatorname*{Lim}_{b=a} \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \sin sa \sin sb \int_0^\infty d\lambda \sin s\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\sin \beta s\lambda}{\lambda}\right),$$

und bei Volumladung

$$(158\text{a}) \qquad -\frac{\pi a^2}{18 e^2}\mathfrak{K}$$

$$= \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left\{\frac{\sin sa - sa \cos sa}{(sa)^2}\right\}^2 \int_0^\infty d\lambda \sin s\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\sin \beta s\lambda}{\lambda}\right).$$

Das nach λ genommene Integral läßt sich auswerten; es ergibt die partielle Integration

$$\int_0^\infty d\lambda \sin s\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\sin \beta s\lambda}{\lambda}\right) = -s\int_0^\infty d\lambda \cos s\lambda \frac{\sin \beta s \lambda}{\lambda}$$

$$= -\frac{s}{2}\left\{\int_0^\infty d\lambda \frac{\sin(\beta+1)s\lambda}{\lambda} + \int_0^\infty d\lambda \frac{\sin(\beta-1)s\lambda}{\lambda}\right\}.$$

Da nun

$$\int_0^\infty d\lambda \frac{\sin(\beta+1)s\lambda}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty d\lambda \frac{\sin(\beta-1)s\lambda}{\lambda} = \pm\frac{\pi}{2} \text{ für } \beta \gtrless 1,$$

so erhält man

$$(158\text{b})\qquad \int_0^\infty d\lambda \sin s\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\sin \beta s \lambda}{\lambda}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \beta < 1 \\ -\frac{s\pi}{2} & \text{für} \quad \beta > 1. \end{cases}$$

Für $\beta < 1$ ist die innere Kraft Null, sowohl im Falle der Flächenladung, wie im Falle der Volumladung. Es folgt das uns bereits bekannte Resultat: Die gleichförmige geradlinige Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit ist eine kräftefreie Bewegung des Elektrons.

Für $\beta > 1$ hingegen folgt aus (158) und (158b) für den Fall der Flächenladung

$$(158\text{c})\qquad -\frac{a}{e^2}\mathfrak{K} = \frac{\beta^2-1}{\beta^2}\cdot \operatorname*{Lim}_{b=a} \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{ds}{s} \sin sa \sin sb.$$

Um das Integral nach s auszuwerten, teilen wir das Integrationsintervall in zwei Teile, $0 < s < \varepsilon$ und $\varepsilon < s < \infty$. Es wird

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s} \sin sa \sin sb = \int_0^\varepsilon \frac{ds}{s} \sin sa \sin sb$$

$$+\frac{1}{2}\int_\varepsilon^\infty \frac{ds}{s} \cos(b-a)s - \frac{1}{2}\int_\varepsilon^\infty \frac{ds}{s}\cos(b+a)s.$$

Für die Differenz der beiden letzten Integrale folgt, nach Einführung der Variabeln $p = |b-a|\, s$ bzw. $p = (b+a)\, s$,

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon|b-a|}^\infty \cos p \frac{dp}{p} - \frac{1}{2}\int_{\varepsilon(b+a)}^\infty \cos p \frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\int_{\varepsilon|b-a|}^{\varepsilon(b+a)} \cos p \frac{dp}{p}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\varepsilon|b-a|}^{\varepsilon(b+a)} \frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon|b-a|}^{\varepsilon(b+a)} (\cos p - 1)\frac{dp}{p} = \frac{1}{2} ln\left(\frac{b+a}{|b-a|}\right) - \int_{\varepsilon|b-a|}^{\varepsilon(b+a)} \frac{dp}{p}\sin^2\frac{p}{2}.$$

Durch Summation folgt

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s} \sin sa \sin sb = \frac{1}{2} ln \left(\frac{b+a}{|b-a|}\right) + \int_0^\varepsilon \frac{ds}{s} \sin sa \sin sb$$

$$- \int_{\varepsilon|b-a|}^{\varepsilon(b+a)} \frac{dp}{p} \sin^2 \frac{p}{2}.$$

Diesem Ausdrucke proportional ist die Kraft, welche das flächenhaft geladene Elektron auf eine mitbewegte konzentrische, mit derselben Ladung versehene Kugelfläche vom Radius b ausübt. Indem wir die ganz beliebig zu wählende Größe ε gegen Null konvergieren lassen, erhalten wir als Wert dieser Kraft

$$\mathfrak{K} = -\frac{e^2}{ab} \cdot \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} \cdot \frac{1}{2} ln \left(\frac{b+a}{|b-a|}\right) \quad \text{für} \quad b \gtrless a. \tag{158d}$$

Die Kraft, welche die Kugel a auf die konzentrische Kugel b und umgekehrt auch die Kugel b auf die Kugel a bei gemeinsamer gleichförmiger Translation mit Überlichtgeschwindigkeit ausübt, wirkt stets der Bewegung entgegen. Ihr Betrag ist ein endlicher, falls die Radien der beiden Kugeln verschieden sind. Führt man indessen den Grenzübergang zum Falle zweier Kugeln von gleichem Radius aus, um die innere Kraft des flächenhaft geladenen Elektrons zu berechnen, so findet man, daß die Kraft logarithmisch unendlich wird. Man schließt hieraus: Die gleichförmige Bewegung eines flächenhaft geladenen kugelförmigen Elektrons mit Überlichtgeschwindigkeit erfordert eine unendliche Kraft; sie ist somit physikalisch unmöglich.

Zum Falle der Volumladung übergehend, erhalten wir aus (158a, b)

$$-\frac{a^2}{9e^2} \cdot \mathfrak{K} = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} \cdot \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left\{\frac{\sin sa - sa \cos sa}{(sa)^2}\right\}^2.$$

Für das hier auftretende Integral nach s erhält man, nach Einführung der Variabeln $p = as$, durch einige Umformungen



$$\int\limits_0^\infty \frac{dp}{p^5}\left(\sin p - p\cos p\right)^2 = -\left\{\frac{(\sin p - p\cos p)^2}{4p^4}\right\}_0^\infty$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dp}{p^3}\sin p\,(\sin p - p\cos p) = -\left\{\frac{\sin p\,(\sin p - p\cos p)}{4p^2}\right\}_0^\infty$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty \frac{dp}{p^2}\left(\cos p\sin p - p\cos^2 p + p\sin^2 p\right)\Big)$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty dp\left(\frac{1}{2}\frac{\sin 2p}{p^2} - \frac{\cos 2p}{p}\right) = -\frac{1}{4}\left\{\frac{\sin 2p}{2p}\right\}_0^\infty = \frac{1}{4}.$$

Daher wird schließlich

$$\mathfrak{K} = -\frac{9}{4}\frac{e^2}{a^2}\cdot\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \tag{158e}$$

die der Bewegung entgegenwirkende innere Kraft im Falle der Volumladung. Wir sehen also:

Die gleichförmige Bewegung des mit gleichförmiger Volumladung erfüllten Elektrons mit Überlichtgeschwindigkeit ist zwar keine kräftefreie Bewegung, aber die erforderliche äußere Kraft hat einen endlichen Betrag, so daß Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit bei Volumladung physikalisch denkbar ist. Der Betrag der Kraft steigt mit wachsender Geschwindigkeit an und konvergiert gegen den Grenzwert

$$|\mathfrak{K}| = \frac{9}{4}\frac{e^2}{a^2};$$

derselbe ist gleich der Kraft, welche zwei ruhende Punktladungen e im Abstand $\frac{2}{3}a$ aufeinander ausüben.

Die hier zutage tretende prinzipielle Verschiedenheit von Flächenladung und Volumladung des allseitig symmetrischen Elektrons ist um so bemerkenswerter, als bei Unterlichtgeschwindigkeit das Verhalten des Elektrons in beiden Fällen

das nämliche ist. Bei quasistationärer Bewegung unterscheiden sich die Massen in beiden Fällen nur durch einen Zahlenfaktor, und derselbe Zahlenfaktor tritt bei der Strahlung des unstetig bewegten Elektrons auf. Auch die Kraft, welche erforderlich ist, um das Elektron plötzlich auf Lichtgeschwindigkeit zu bringen und auf dieser zu halten, ist im Falle der Volumladung von derselben Größenordnung, wie im Falle der Flächenladung. Aus dem Verhalten der Elektronen bei Unterlichtgeschwindigkeit und bei Lichtgeschwindigkeit wird daher kaum ein Kriterium herzuleiten sein, welche zwischen diesen beiden Möglichkeiten entscheidet. Die Entscheidung wäre aber sofort gegeben, und zwar zugunsten der Volumladung, sobald man Elektronen beobachtet hätte, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen.

Es ist allerdings kaum zu hoffen, daß es gelingen wird, die Elektronen, selbst wenn ihnen im Innern des Radiumatomes solche Geschwindigkeiten erteilt wären, auf Überlichtgeschwindigkeit zu halten; denn die hierzu erforderliche Kraft ist eine so enorme, daß sie die Kräfte der experimentell herstellbaren Felder um das Billionenfache übersteigt. Was geschieht aber, wenn keine äußere Kraft wirkt? Wie bewegt sich das einmal auf Überlichtgeschwindigkeit gebrachte Elektron kräftefrei weiter? Darüber sagt die Theorie bisher nichts aus.

Zweiter Abschnitt.
Elektromagnetische Vorgänge in wägbaren Körpern.

Erstes Kapitel.
Ruhende Körper.

§ 28. Ableitung der Hauptgleichungen aus der Elektronentheorie.

Im ersten Bande dieses Werkes (§ 59) haben wir die Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper entwickelt. Der dort eingenommene Standpunkt war derjenige der Phänomenologie, welche sich mit der Darstellung der beobachteten Erscheinungen begnügt und ein Eingehen auf atomistische Vorstellungen ablehnt. Bei den meisten elektromagnetischen Vorgängen im engeren Sinne, insbesondere bei denjenigen, die in ruhenden Körpern stattfinden, erweist sich die phänomenologische Behandlungsweise als ausreichend, und sogar durch ihre größere Einfachheit als der atomistischen Auffassung überlegen.

Nun haben wir aber gewisse Erscheinungen der Konvektionsstrahlung kennen gelernt, welche sich nur vom atomistischen Standpunkte aus befriedigend haben deuten lassen. Wir haben gesehen, daß die negativen Elektronen, die wir in den Kathoden- und Radiumstrahlen als bewegt annehmen, auch bei der Lichtstrahlung der Körper eine Rolle spielen. Wir wollen uns indessen hiermit nicht begnügen; wir wollen versuchen, die elektromagnetischen und optischen Erscheinungen in ihrer Gesamtheit auf Grund der Elektronentheorie zu begreifen. Wir müssen zu diesem Zwecke zunächst den Nachweis führen, daß die Hauptgleichungen der Elektrodynamik sich aus den Grundgleichungen der Elektronentheorie ableiten lassen.

Die Elektronentheorie kennt nur das elektromagnetische Feld im Äther, welches durch ruhende oder konvektiv bewegte Elektronen erregt wird. Sie nimmt an, daß dieses elektromagnetische Feld auch im Innern der ponderablen Körper besteht, oder, wie man zu sagen pflegt, daß der Äther die ponderablen Körper durchdringt. Daß die elektrischen und magnetischen Eigenschaften der Körper von denjenigen des leeren Raumes abweichen, wird darauf zurückgeführt, daß Elektronen sich im Innern des Körpers befinden. Die Leitfähigkeit der Körper wird durch „Leitungselektronen“ erklärt, welche entweder, wie in den Metallen, frei beweglich, oder, wie in den Elektrolyten, an neutrale Atom- oder Molekülgruppen gebunden sein können; diese wandern im Körper unter der Einwirkung elektrischer Kräfte über größere Strecken hin und bilden so einen elektrischen Leitungsstrom. Die elektrische Polarisation der Dielektrika wird auf negative Elektronen zurückgeführt, welche an die positiven gebunden sind und mit ihnen zusammen elektrische Dipole bilden. Die Bewegung dieser „Polarisationselektronen“ in veränderlichen elektrischen Feldern wird einen elektrischen Strom ergeben, welcher den auf die Materie entfallenden Anteil des Verschiebungsstromes bildet. Führen die gebundenen negativen Elektronen ferner umlaufende Bewegungen um die positiven aus, so geben sie zu einer Magnetisierung des Körpers Veranlassung und werden dann als „Magnetisierungselektronen“ zu bezeichnen sein. Es werden allerdings auch die freien Elektronen im magnetischen Felde sich in gekrümmten Bahnen bewegen und so die Rolle von Magnetisierungselektronen spielen können.

Die von den einzelnen Elektronen erregten Felder, auf welche sich die Grundgleichungen des § 4 (I bis IV) beziehen, weisen außerordentlich große räumliche Unregelmäßigkeiten auf. Hat doch das Feld des ruhenden Elektrons in den beiden Endpunkten eines Elektronendurchmessers die entgegengesetzte Richtung. Entsprechende starke zeitliche Schwankungen der Feldstärken werden den Grundgleichungen zufolge an einem

im Raume festen Punkte auftreten, wenn ein Elektron sich über ihn hinweg bewegt. Wir erwähnten bereits in § 4, daß die Felder, deren Existenz die Grundgleichungen postulieren, der direkten Beobachtung unzugänglich sind. Es sind immer nur die Mittelwerte, auf welche die Beobachtungen sich beziehen. Die Mittelwertsbildung über die Felder der einzelnen Elektronen wird uns zu den Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie führen und wird uns zeigen, wie die dort auftretenden Vektoren mit den in den Feldgleichungen der Elektronentheorie auftretenden beiden Vektoren zusammenhängen.

Wir wollen die Bezeichnungen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ für die in den Hauptgleichungen auftretenden Feldstärken der beobachtbaren Felder reservieren, und daher, um Verwechselungen vorzubeugen, für die elektromagnetischen Vektoren, welche durch die Grundgleichungen (I bis IV) der Elektronentheorie miteinander verknüpft sind, jetzt die Bezeichnungen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{h}$ einführen. Jene Gleichungen sind dann zu schreiben:

$$\text{(I)} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\varrho \mathfrak{v},$$

$$\text{(II)} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t},$$

$$\text{(III)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{e} = 4\pi\varrho,$$

$$\text{(IV)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0.$$

Aus diesen Feldgleichungen hat H. A. Lorentz für den allgemeinen Fall eines bewegten Körpers die Hauptgleichungen der Elektrodynamik durch Mittelwertsbildung abgeleitet.[1]) Wir werden in diesem Paragraphen die entsprechenden Entwickelungen für ruhende Körper durchführen. Hier ergeben alle auf dem Boden der Nahewirkung stehenden Theorien dasselbe, während in der Elektrodynamik bewegter Körper, wie wir später sehen werden, zwischen den verschiedenen Theorien gewisse Abweichungen vorhanden sind.

1) H. A. Lorentz. Akad. van Wetenschapen te Amsterdam 11, 1902, S. 305. Enzykl. d. mathem. Wissensch. Bd. V, Art. 14, Nr. 26—34.

Wir bezeichnen mit H. A. Lorentz eine Strecke als „physikalisch unendlich klein“, wenn sie klein ist gegen diejenigen Strecken, innerhalb deren eine merkliche Inhomogenität des Feldes besteht, aber groß gegen den Abstand zweier benachbarter Elektronen oder Moleküle. Es hängt dieser Definition gemäß wesentlich von der Inhomogenität des betreffenden Feldes ab, ob eine Strecke als physikalisch unendlich klein zu bezeichnen ist oder nicht; in der Elektrostatik z. B. wird eine Strecke, die gleich einer Wellenlänge des roten Lichtes ist, noch physikalisch unendlich klein zu nennen sein; denn die Probekörper, die zur Untersuchung des elektrostatischen Feldes verwandt werden, sind viel zu grob, um eine etwaige Inhomogenität des Feldes auf dieser Strecke überhaupt zu bemerken. In der Optik hingegen, wo es sich nach den Vorstellungen der elektromagnetischen Lichttheorie um Felder handelt, die auf einer Strecke von einer halben Wellenlänge die Richtung umkehren, wird jene Strecke keineswegs als physikalisch unendlich klein betrachtet werden dürfen. Anderseits legt die obige Definition eine gewisse, von der Zahl der Elektronen bzw. Moleküle abhängige untere Grenze für die physikalisch unendlich kleine Strecke fest. Sollen die beiden Bedingungen einander nicht widersprechen, so muß der mittlere Abstand zweier Moleküle verschwindend klein gegen die Wellenlänge sein, derart, daß in einem Würfel, dessen Kanten etwa einem Hundertstel der Wellenlänge der betreffenden elektromagnetischen Welle gleich ist, noch viele Millionen von Elektronen enthalten sind. Von physikalisch unendlich kleinen Gebietsteilen kann nur dann die Rede sein, wenn die Materie entsprechend dicht gelagert ist.

Um den Mittelwert irgendeiner skalaren oder Vektorgröße q in einem Punkte P des Raumes zu bestimmen, konstruieren wir um P eine Kugel, deren Radius physikalisch unendlich klein ist, und dividieren das über die Kugel erstreckte Volumintegral von q durch das Volumen v der Kugel:

$$\bar{q} = \frac{\int q\,dv}{v}. \tag{159}$$

Bei der Vergleichung der Mittelwerte, welche zu zwei verschiedenen Zeiten in einem und demselben Punkte herrschen, ist selbstverständlich der Radius der Kugel konstant zu halten, so daß man hat

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial q}{\partial t}}. \tag{159a}$$

Es sind demnach Mittelwertsbildung und Differentiation nach der Zeit miteinander vertauschbare Operationen. Das gleiche gilt von den Operationen der Mittelwertsbildung und der Differentiation nach den Koordinaten. Hierbei handelt es sich um die Vergleichung der Werte von $\overline{q}$, welche in zwei benachbarten Punkten P und P' des Raumes zu derselben Zeit bestehen. Es sind dabei die Mittelwerte $\overline{q}$ durch zwei um P und P' geschlagene physikalisch unendlich kleine Kugeln von dem gleichen Radius definiert. Demgemäß ist z. B.

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\int q\, dv}{v}$$

nichts anderes, als die durch Verrückung der Kugel parallel der x-Achse bedingte Veränderung des Volumintegrales von q, dividiert durch das Volumen der Kugel. Diese Veränderung läßt sich darstellen als herrührend von den (positiven oder negativen) Beiträgen derjenigen Volumelemente, welche die Oberfläche f der Kugel bei der Verrückung bestreicht. Es folgt

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot \int q \cos(\nu x)\, df.$$

Anderseits ist der Mittelwert der Differentialquotienten von q nach x

$$\overline{\frac{\partial q}{\partial x}} = \frac{1}{v} \int \frac{\partial q}{\partial x}\, dv = \frac{1}{v} \int q \cos(\nu x)\, df,$$

so daß man erhält

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial q}{\partial x}}. \tag{159b}$$

Es sind also, wie behauptet, auch die räumliche Differentiation und die Mittelwertsbildung miteinander vertauschbare Operationen.

Auf Grund der Regeln (159a, b) ergeben sich durch Mittelwertsbildung aus I bis IV die Differentialgleichungen

$$\text{(Ia)} \quad \operatorname{curl} \overline{\mathfrak{h}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{\mathfrak{e}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{\varrho \mathfrak{v}},$$

$$\text{(IIa)} \quad \operatorname{curl} \overline{\mathfrak{e}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{\mathfrak{h}}}{\partial t},$$

$$\text{(IIIa)} \quad \operatorname{div} \overline{\mathfrak{e}} = 4\pi\overline{\varrho},$$

$$\text{(IVa)} \quad \operatorname{div} \overline{\mathfrak{h}} = 0.$$

Indem die Mittelwerte für physikalisch unendlich kleine Bereiche gebildet wurden, sind die raschen und regellosen räumlichen Änderungen des Feldes, welche durch die atomistische Struktur der Elektrizität und der Materie bedingt sind, herausgefallen. Man kann daher bei der Berechnung des curl und der Divergenz der Vektoren $\overline{\mathfrak{e}}$ und $\overline{\mathfrak{h}}$ unter $dx\, dy\, dz$, statt mathematisch unendlich kleiner Strecken, auch physikalisch unendlich kleine Strecken verstehen. Ferner kann man die Mittelwertsbildungen, wie über den Raum, so auch über die Zeit erstrecken, und unter dt ein „physikalisch unendlich kleines Zeitintervall" verstehen, das heißt ein solches, in welchem die Vektoren $\overline{\mathfrak{e}}$, $\overline{\mathfrak{h}}$ verschwindend geringe zeitliche Änderungen erfahren.

Wir betrachten zunächst den idealen Fall, daß der Körper nur Leitungselektronen enthält. Dann gilt

$$\text{(160)} \qquad \{\overline{\varrho}\}_l = \varrho, \quad \{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_l = \mathfrak{i}.$$

Die beobachtbaren Dichten der Elektrizität und des Leitungsstromes ϱ, $\mathfrak{i}$ sind dann einfach gleichzusetzen den Mittelwerten der Dichten der Elektrizität und des Konvektionsstromes, berechnet für physikalisch unendlich kleine Volumelemente. Nehmen wir eine Reihe verschiedener Elektronenarten an, von den Ladungen $e_1, e_2, e_3 \ldots$, den auf die Volumeinheit berechneten Zahlen $N_1, N_2, N_3 \ldots$, und den mittleren Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3$, so hat man

$$\text{(160a)} \qquad \varrho = N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3 \ldots$$

$$\text{(160b)} \qquad \mathfrak{i} = N_1 e_1 \mathfrak{v}_1 + N_2 e_2 \mathfrak{v}_2 + N_3 e_3 \mathfrak{v}_3 \ldots$$

Für einen idealen Leiter, der weder elektrisch polarisierbar noch magnetisierbar ist, nehmen die Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie eine sehr einfache Form an; es wird nämlich $\mathfrak{E}$ mit $4\pi\,\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$ identisch. Im allgemeinen Falle aber sind zwei Paare elektrischer und magnetischer Vektoren (außer $\mathfrak{i}$) in den Hauptgleichungen zu unterscheiden (vgl. I, § 59). Es kommt jetzt gerade darauf an, den Zusammenhang dieser Vektoren mit $\overline{\mathfrak{e}}$ und $\overline{\mathfrak{h}}$ richtig zu erfassen und den Unterschied zwischen wahrer und freier Elektrizität, sowie wahrem und freiem Strome, vom Standpunkte der Elektronentheorie aus zu verstehen. Im Hinblick hierauf wollen wir die Anteile von $\overline{\varrho}$ und $\overline{\varrho\mathfrak{v}}$ in Betracht ziehen, welche von den aneinander gebundenen positiven und negativen Elektronen herrühren.

Für ein elektrisch neutrales Molekül ist die Gesamtladung Null. Auch bildet die fortschreitende Bewegung eines solchen Moleküles keinen Leitungsstrom. Dennoch kann die gegenseitige Verschiebung der Elektronen im Molekül zu einer Abänderung des Mittelwertes $\overline{\varrho}$ der räumlichen Dichte Veranlassung geben, der ja durch eine im Raume feste, physikalisch unendlich kleine Kugel definiert war. Auch können die inneren Bewegungen der Elektronen sich durch eine Änderung des Mittelwertes $\overline{\varrho\mathfrak{v}}$ der Stromdichte bemerkbar machen.

Wir nennen das über das Volumen eines Moleküles erstreckte Integral

$$\mathfrak{p} = \int \varrho\mathfrak{r}\,dv \tag{161}$$

das elektrische Moment des Moleküles, indem wir unter $\mathfrak{r}$ den von einem festen Punkte O des Moleküles aus gezogenen Fahrstrahl verstehen. Hat man es mit einem aus zwei Punktladungen bestehenden Dipole zu tun, so ist $\mathfrak{p}$ das Moment des Dipoles.

Wir wollen indessen die allgemeinere Annahme machen, daß sich in jedem Moleküle n Elektronen, von den Ladungen $e_1, e_2 \ldots e_n$, befinden. Das elektrische Moment des Moleküles ist dann

$$\mathfrak{p} = e_1 \mathfrak{r}_1 + e_2 \mathfrak{r}_2 + \cdots + e_n \mathfrak{r}_n, \tag{161a}$$

wobei

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 0 \tag{161b}$$

ist. Es mag N die auf die Volumeinheit berechnete Zahl der Moleküle sein.

Wir betrachten ein im Raume festes, physikalisch unendlich kleines Flächenelement df. Welches wird die Elektrizitätsmenge sein, die bei der Herstellung der Momente der Moleküle durch das Flächenelement df tritt? Wir wollen zunächst voraussetzen, daß alle in einem physikalisch unendlich kleinen Bereiche gelegenen Moleküle das gleiche Moment $\mathfrak{p}$ besitzen; sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, so können wir doch verschiedene Molekülgruppen von den Momenten $\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'' \ldots$ und den Molekülzahlen $N', N'' \ldots$ unterscheiden und die Moleküle jeder Gruppe gesondert betrachten. Auf die betreffende Molekülgruppe bezieht sich dann dasjenige, was hier von der ganzen Schar der Moleküle ausgesagt wird.

Wir wollen den Punkt O des Moleküles, von dem aus die Radienvektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \ldots \mathfrak{r}_n$ gezogen sind, den Mittelpunkt des Moleküles nennen. Die Herstellung des Momentes $\mathfrak{p}$ erfolgt, indem die Ladung e_1 von O nach dem Endpunkte A_1 des Fahrstrahles $\mathfrak{r}_1$, die Ladung e_2 von O nach dem Endpunkte A_2 des Fahrstrahles $\mathfrak{r}_2$ bewegt wird, usf. Soll nun die Ladung e_1 bei der Verschiebung von O nach A_1 durch das im Raume feste, physikalisch unendlich kleine Flächenelement df hindurchtreten, so muß sich der Mittelpunkt O des Moleküles offenbar in dem schiefen Zylinder befinden, den man erhält, indem man von den Punkten des Flächenelementes df aus die Fahrstrahlen $-\mathfrak{r}_1$ konstruiert. Die Zahl der Moleküle, deren Mittelpunkte innerhalb dieses Zylinders liegen, ist gleich der Zahl N der in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle, multipliziert mit dem Rauminhalt des Zylinders, also gleich:

$$N \mathfrak{r}_{1\nu}\, df.$$

Diese Moleküle sind es, welche bei der Herstellung der Momente (161a) Elektronen erster Art durch df senden, und zwar im Sinne derjenigen Normalen, welche mit $\mathfrak{r}_1$ einen spitzen Winkel einschließt. Die gesamte, bei der Herstellung des Momentes mit den Elektronen erster Art durch df im Sinne der Normalen ν tretende Elektrizitätsmenge wird durch

$$N e_1 \mathfrak{r}_{1\nu} df$$

auch dem Vorzeichen nach richtig angegeben. Die Anteile der verschiedenen Elektronen summierend, erhalten wir

$$N \mathfrak{p}_\nu df = \mathfrak{P}_\nu df$$

für die gesamte, bei der Herstellung der Momente durch df tretende Elektrizität. Dabei stellt $\mathfrak{P} = N\mathfrak{p}$ die Vektorsumme der Momente aller in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle dar. Das erhaltene Resultat gilt auch dann, wenn die in einem physikalisch unendlich kleinen Volumelement liegenden Moleküle nicht alle das gleiche elektrische Moment besitzen. Man hat die Betrachtung dann auf jede Gruppe gleichartiger Moleküle anzuwenden und die Anteile aller Gruppen zu summieren.

In diesem allgemeineren Falle ist dann

$$\mathfrak{P} = N' \mathfrak{p}' + N'' \mathfrak{p}'' + \cdots \tag{161c}$$

zu setzen.

Dieser Vektor stellt die auf die Volumeinheit berechnete „elektrische Polarisation" dar. Indem die Elektronentheorie die Polarisation eines Dielektrikums auf die Verschiebung der gebundenen Elektronen zurückführt, verleiht sie dem Vektor $\mathfrak{P}$, der im ersten Bande (§ 41) eingeführt wurde, eine konkrete physikalische Bedeutung.

Die bei der Polarisation des Dielektrikums durch ein im Raume festes Flächenelement df hindurchtretende Elektrizität wird durch $\mathfrak{P}_\nu df$ angegeben. Demnach ist

$$\{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_p = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \tag{162}$$

der von den Polarisationselektronen herrührende Anteil der Stromdichte. Er stellt, den Vorstellungen der

Elektronentheorie nach, den an der Materie haftenden Bestandteil des Verschiebungsstromes dar (vgl. I, S. 193).

Bei der Herstellung der elektrischen Momente der Moleküle ist die Elektrizitätsmenge

$$\int \mathfrak{P}_\nu \, df = \int \operatorname{div} \mathfrak{P} \, dv$$

durch eine geschlossene Fläche herausgetreten. Vor Herstellung des Momentes, wo die Ladungen $e_1, e_2 \ldots e_n$ alle in dem Mittelpunkte O des Moleküles lagen, gingen nach (161b) von dem einzelnen Moleküle überhaupt keine Kraftlinien aus, die mittlere Dichte der Elektrizität in jedem physikalisch unendlich kleinen Bereiche war gleich Null. Da nun bei Herstellung der Momente die soeben berechnete Elektrizitätsmenge aus dem Raume v herausgetreten ist, so erhalten wir für den von den Polarisationselektronen herrührenden Anteil der elektrischen Dichte:

$$\{\bar{\varrho}\}_p = - \operatorname{div} \mathfrak{P}. \tag{162a}$$

Die Ausdrücke (162) und (162a) der von den Polarisationselektronen herrührenden Dichten des Stromes und der Elektrizität erfüllen, wie es sein muß, die Kontinuitätsbedingung

$$\operatorname{div} \{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_p + \frac{\partial \{\bar{\varrho}\}_p}{\partial t} = 0. \tag{162b}$$

Man denke sich von dem Mittelpunkte O eines Moleküles aus zwei entgegengesetzt gleiche Radienvektoren $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ konstruiert und an ihren Endpunkten gleiche Ladungen e_1, e_2 angebracht, ferner im Mittelpunkte selbst die Ladung

$$e_3 = -\{e_1 + e_2\} = -2e_1$$

befindlich. Das elektrische Moment dieses Systemes wird gleich Null sein, so daß solche Moleküle zur Polarisation des Dielektrikums keinen Anteil liefern. Lassen wir nun die Ladungen e_1, e_2 um den Mittelpunkt O umlaufen, so wird ein Polarisationsstrom diese Umlaufsbewegung nicht begleiten. Doch wird die Umlaufsbewegung, wenn sie genügend schnell erfolgt, sich als eine Magnetisierung des Körpers kundgeben.

Die Elektronentheorie verfolgt das Ziel, durch solche umlaufende Bewegungen der Elektronen die Magnetisierung der Körper zu erklären, indem sie die Bestrebungen von Ampère und W. Weber wieder aufnimmt.

Wir definieren allgemein das **magnetische Moment** eines elektrisch neutralen Moleküles durch

$$(163)\qquad \mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\int dv\varrho\,[\mathfrak{r}\mathfrak{v}] = \frac{1}{2}\int dv\,[\mathfrak{r}\mathfrak{i}].$$

Haben wir n als Punktladungen zu betrachtende Elektronen im Moleküle, so ist

$$(163\text{a})\qquad \mathfrak{m} = \frac{e_1}{c}\cdot\frac{1}{2}[\mathfrak{r}_1\mathfrak{v}_1] + \frac{e_2}{c}\cdot\frac{1}{2}[\mathfrak{r}_2\mathfrak{v}_2] + \cdots + \frac{e_n}{c}\cdot\frac{1}{2}[\mathfrak{r}_n\mathfrak{v}_n].$$

Ist nicht nur

$$(163\text{b})\qquad e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 0,$$

sondern auch

$$(163\text{c})\qquad \mathfrak{p} = e_1\mathfrak{r}_1 + e_2\mathfrak{r}_2 + \cdots + e_n\mathfrak{r}_n = 0,$$

und daher

$$(163\text{d})\qquad \frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial t} = e_1\mathfrak{v}_1 + e_2\mathfrak{v}_2 + \cdots + e_n\mathfrak{v}_n = 0,$$

so daß das Elektronensystem weder zum Leitungsstrome, noch auch zur Polarisation und zum Polarisationsstrome Beiträge liefert, so wird es als „**Magnetisierungselektron**" schlechtweg bezeichnet. Ist $\mathfrak{m}$ von Null verschieden und (163b) nicht erfüllt, so wird das Molekül nicht elektrisch neutral sein, es wird sowohl zum Leitungsstrome wie zur Magnetisierung beitragen, während in dem Falle, wo $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$ für ein elektrisch neutrales Molekül von Null verschieden sind, man das Molekül sowohl als Polarisationselektron, wie auch als Magnetisierungselektron in Betracht zu ziehen hat.

Der Beitrag jeder einzelnen Elektronenart zum magnetischen Momente bestimmt sich als Produkt aus seiner elektromagnetisch gemessenen Ladung und dem axialen Vektor $\frac{1}{2}[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]$, der im Sinne der Punktmechanik als Flächengeschwindig-

keit bezogen auf den Mittelpunkt O des Moleküles bezeichnet werden kann. Das magnetische Moment stellt sich auch hier als ein axialer Vektor dar, wenn anders die Elektrizität ein wirklicher Skalar ist.

Wir werden annehmen dürfen, daß die Umlaufsbewegungen der Elektronen, die zur Bildung magnetischer Momente Veranlassung geben, periodischer Art sind, und daß in einem physikalisch unendlich kleinen Zeitintervall eine große Zahl von Umläufen stattfinden. Rechnet man mit den über ein physikalisch unendlich kleines Zeitintervall erstreckten Mittelwerten, so wird (163c) unter diesen Umständen auch dann erfüllt sein, wenn z. B. ein negatives Elektron um das ruhende positive Elektron Umlaufsbewegungen ausführt; die periodische Schwankung des elektrischen Momentes erfolgt dann so rasch, daß sie sich der Beobachtung entzieht, und es wird das Elektronenpaar dann nicht mehr als „Polarisationselektron", sondern ausschließlich als Magnetisierungselektron in Betracht kommen.

Die Magnetisierungselektronen steuern nun ihrerseits einen Anteil zum Mittelwerte des Konvektionsstromes $\overline{\rho \mathfrak{v}}$ bei. Die Berechnung dieses Anteiles können wir zurückführen auf diejenigen Regeln, welche wir soeben zum Zwecke der Berechnung der mittleren, von den Polarisationselektronen herrührenden elektrischen Dichte entwickelt haben. Wir verstehen unter $\mathfrak{k}$ einen durchweg konstanten Hilfsvektor und bilden das Vektorprodukt aus ihm und dem magnetischen Momente $\mathfrak{m}$ entsprechend der Rechnungsregel δ (Bd. I, S. 437):

$$[\mathfrak{k}\mathfrak{m}] = \frac{e_1}{2c}\left\{\mathfrak{r}_1(\mathfrak{k}\mathfrak{v}_1) - \mathfrak{v}_1(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_1)\right\} + \frac{e_2}{2c}\left\{\mathfrak{r}_2(\mathfrak{k}\mathfrak{v}_2) - \mathfrak{v}_2(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_2)\right\} + \cdots$$

$$= \mathfrak{r}_1\left(\mathfrak{k}, \frac{e_1\mathfrak{v}_1}{c}\right) + \mathfrak{r}_2\left(\mathfrak{k}, \frac{e_2\mathfrak{v}_2}{c}\right) + \cdots + \mathfrak{r}_n\left(\mathfrak{k}, \frac{e_n\mathfrak{v}_n}{c}\right)$$

$$- \frac{1}{2c}\cdot\frac{d}{dt}\left\{e_1\mathfrak{r}_1(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_1) + e_2\mathfrak{r}_2(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_2) + \cdots + e_n\mathfrak{r}_n(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_n)\right\}\cdot$$

Sind nun, wie angenommen wurde, die Perioden der Umlaufsbewegungen der Elektronen so gering, daß in einem physikalisch unendlich kleinen Zeitintervalle eine große Zahl

von Umläufen stattfindet, so fällt bei der Mittelwertsbildung über ein solches Intervall das zweite Glied fort; denn die Konfiguration der Ladungen im Moleküle bleibt im Mittel ungeändert. Die entstehende Gleichung

$$(164) \qquad [\mathfrak{t}\mathfrak{m}] = \mathfrak{r}_1\left(\mathfrak{t}, \frac{e_1\mathfrak{v}_1}{c}\right) + \mathfrak{r}_2\left(\mathfrak{t}, \frac{e_2\mathfrak{v}_2}{c}\right) + \cdots + \mathfrak{r}_n\left(\mathfrak{t}, \frac{e_n\mathfrak{v}_n}{c}\right)$$

ist der Gleichung (161a) für das elektrische Moment des Moleküles an die Seite zu stellen. Dem Skalar e dort entspricht hier der Skalar $\left(\mathfrak{t}, \frac{e\mathfrak{v}}{c}\right)$. Derselbe genügt infolge von (163d) der Bedingung

$$(164a) \qquad \left(\mathfrak{t}, \frac{e_1\mathfrak{v}_1}{c}\right) + \left(\mathfrak{t}, \frac{e_2\mathfrak{v}_2}{c}\right) + \cdots + \left(\mathfrak{t}, \frac{e_n\mathfrak{v}_n}{c}\right) = 0,$$

welche (161b) entspricht.

Führen wir nun den Vektor ein:

$$(164b) \qquad \mathfrak{M} = N'\mathfrak{m}' + N''\mathfrak{m}'' + \cdots,$$

welcher die von den verschiedenen Molekülgattungen herrührende, auf die Volumeinheit berechnete **Magnetisierung** darstellt, so entspricht der Vektor $[\mathfrak{t}\mathfrak{M}]$ vollkommen dem Vektor $\mathfrak{P}$ (vgl. 161c). Wie wir in (162a) aus $\mathfrak{P}$ den Mittelwert $\bar{\varrho}$ der elektrischen Dichte ableiteten, so können wir nunmehr aus dem Vektor $[\mathfrak{t}\mathfrak{M}]$ auf Grund der analogen Beziehung

$$\left(\mathfrak{t}, \frac{\overline{\varrho\mathfrak{v}}}{c}\right) = -\operatorname{div}[\mathfrak{t}\mathfrak{M}]$$

den Mittelwert des von den Magnetisierungselektronen herrührenden Konvektionsstromes ermitteln. Da $\mathfrak{t}$ ein vom Orte unabhängiger Vektor ist, so ergibt die Regel λ (Bd. I, S. 438)

$$-\operatorname{div}[\mathfrak{t}\mathfrak{M}] = \mathfrak{t}\operatorname{curl}\mathfrak{M}.$$

Da dieses für jede beliebige Richtung des Hilfsvektors $\mathfrak{t}$ gelten muß, so folgt

$$(164c) \qquad \{\overline{\varrho\mathfrak{v}}\}_m = c \cdot \operatorname{curl}\mathfrak{M}$$

als **Mittelwert des von den Magnetisierungselektronen herrührenden elektrischen Stromes.** Die Mittelwerts-

bildung bezieht sich dabei, wie aus den obigen Überlegungen folgt, auf physikalisch unendlich kleine Zeiten und physikalisch unendlich kleine Gebietsteile des Raumes. Der Strom (164c) genügt der Kontinuitätsbedingung, ohne daß eine parallel gehende zeitliche Änderung der Dichte der Elektrizität zu berücksichtigen wäre.

Wir schreiten nunmehr zur Summierung der Anteile, die von den verschiedenen Elektronenarten zur mittleren Dichte der Elektrizität und des elektrischen Stromes beigesteuert werden. Aus (160) und (162a) folgt

$$\overline{\varrho} = \{\overline{\varrho}\}_l + \{\overline{\varrho}\}_p = \varrho - \operatorname{div} \mathfrak{P} = \varrho'. \tag{165}$$

Der erste Bestandteil, die von den Leitungselektronen herrührende Dichte, ist identisch mit der Dichte der wahren Elektrizität in der Maxwell-Hertzschen Theorie. In der Tat, die wahre Ladung eines Leiters ist diejenige, die nur durch einen Leitungsstrom abgeändert werden kann, und die, wenn ein solcher fehlt, auch dann konstant bleibt, wenn der Leiter in ein anderes Dielektrikum eingebettet wird. Die durch die Polarisation des Dielektrikums abgeänderte mittlere Dichte $\overline{\varrho}$ hingegen ist identisch mit der Dichte ϱ' der freien Elektrizität in der Maxwell-Hertzschen Theorie. Da ϱ' durch die Divergenz von $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}$, ϱ aber durch die Divergenz von $\mathfrak{D}$ gegeben wurde (vgl. I, § 39), so muß zwischen diesen beiden Vektoren die Beziehung bestehen:

$$\operatorname{div} \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E} = \operatorname{div} \{\mathfrak{D} - \mathfrak{P}\}, \tag{165a}$$

wenn anders die Mittelwertsbildung uns wirklich zu den Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie führen soll.

Als resultierender Mittelwert des elektrischen Stromes folgt aus (160, 162 und 164c)

$$\overline{\varrho \mathfrak{v}} = \{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_l + \{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_p + \{\overline{\varrho \mathfrak{v}}\}_m = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + c \operatorname{curl} \mathfrak{M}. \tag{165b}$$

Der erste Bestandteil, der von den Leitungselektronen herrührt, ist auch für magnetisierte Leiter

mit der Dichte des wahren Leitungsstromes in der Maxwell-Hertzschen Theorie identisch. Derselbe bestimmt die Änderung der wahren Ladung der Leiter. Die durch die Mitwirkung der Magnetisierungselektronen abgeänderte mittlere Dichte hingegen

$$\mathfrak{i}' = \mathfrak{i} + c \operatorname{curl} \mathfrak{M} \tag{165c}$$

(vgl. Bd. I S. 233 Gleichung 176) ist nichts anderes, als die Dichte des freien Stromes in der Maxwell-Hertzschen Theorie. Da für stationäre Ströme $\frac{4\pi\mathfrak{i}'}{c}$ durch curl $\mathfrak{B}$, $\frac{4\pi\mathfrak{i}}{c}$ hingegen durch curl $\mathfrak{H}$ bestimmt wird, so ist zu postulieren:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \operatorname{curl} \{\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}\}. \tag{165d}$$

Wie ordnen sich nun die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ den Mittelwerten $\bar{\mathfrak{e}}$ und $\bar{\mathfrak{h}}$ zu, die in den Grundgleichungen (Ia bis IVa) der Elektronentheorie auftreten? Wir sehen sofort, daß wir der quellenfreien Verteilung des Vektors $\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion gerecht werden, wenn wir setzen

$$\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{h}}. \tag{166}$$

Alsdann führt (IIa) auf die zweite Hauptgleichung (Bd. I S. 238 Gleichung 178), bei Ausschluß eingeprägter Kräfte, wenn $\bar{\mathfrak{e}}$ mit $\mathfrak{E}$ identifiziert wird:

$$\mathfrak{E} = \bar{\mathfrak{e}}. \tag{166a}$$

Die Elektronentheorie identifiziert die Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ der Maxwellschen Theorie mit den Mittelwerten der elektromagnetischen Vektoren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{e}$, welche die Felder der einzelnen Elektronen kennzeichnen. Hier wird von vornherein ein Standpunkt eingenommen, welcher nicht die Hertz-Heavisidesche Analogie der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ einerseits, $4\pi\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ anderseits zugrunde legt. Die Symmetrie der elektrischen und magnetischen Größen wird von der Elektronentheorie aufgegeben; in ihren Grundgleichungen spielt bereits $\mathfrak{h}$ eine andere Rolle wie $\mathfrak{e}$, was daher rührt, daß zwar Elektrizität und elektrischer

Konvektionsstrom, aber keineswegs Magnetismus und magnetischer Konvektionsstrom angenommen wird.

Die Einführung der Definitionen (166) und (166a), sowie des für die Stromdichte erhaltenen Mittelwertes (165b), in die erste Grundgleichung (Ia) ergibt

$$\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c} + 4\pi \operatorname{curl} \mathfrak{M}.$$

Die beiden ersten Glieder, der Verschiebungsstrom im Äther und der Polarisationsstrom im Körper, ergeben zusammen den Verschiebungsstrom der Maxwellschen Theorie. Setzen wir

$$4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}, \tag{166b}$$

so erfüllen wir gleichzeitig die Forderung (165a). Alsdann folgt durch Vergleichung mit der ersten Hauptgleichung (177a) in Bd. I, S. 237, daß wir $\mathfrak{H}$ folgendermaßen zu definieren haben

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B} - 4\pi\mathfrak{M}. \tag{166c}$$

Dann wird die erste Hauptgleichung der Maxwellschen Theorie und gleichzeitig die Forderung (165d) erfüllt.

Die Lorentzsche Theorie definiert die beobachtbaren elektromagnetischen Vektoren durch (166) und (166a, b, c) und gelangt so zu den Hauptgleichungen der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper:

$$\text{(Ib)} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{4\pi \mathfrak{i}}{c},$$

$$\text{(IIb)} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\text{(IIIb)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(IVb)} \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Dabei identifiziert sie — das muß besonders betont werden — die Mittelwerte der Dichten der Elektrizität und des elektrischen Stromes, welche von den freien und von den gebundenen Elektronen herrühren, keineswegs mit ϱ und $\mathfrak{i}$. Vielmehr wird der Mittelwert der

elektrischen Dichte mit der freien Dichte der Maxwell-Hertzschen Theorie identifiziert, der Mittelwert des Konvektionsstromes der Elektronen mit dem freien Strome, vermehrt um den an der Materie haftenden Anteil des Verschiebungsstromes (vgl. 165 und 165b, c).

Das Schema der Hauptgleichungen wird in der Maxwell-Hertzschen Theorie (vgl. I, § 60) ausgefüllt durch Hinzufügung der Beziehungen, welche $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$ verknüpfen. Die Elektronentheorie gelangt zu diesen Beziehungen, indem sie die Veränderungen betrachtet, welche die Lage und der Bewegungszustand der Elektronen infolge der Einwirkung äußerer Felder erfährt. Wir werden insbesondere für die Polarisationselektronen diese Betrachtungen in den beiden nächsten Paragraphen durchführen und werden zeigen, daß die Berücksichtigung der Trägheit der Elektronen zum Verständnis der Farbenzerstreuung und der magnetischen Drehung der Polarisationsebene führt.

Von eingeprägten Kräften haben wir abgesehen. Die Maxwellsche Theorie versteht unter eingeprägten elektrischen Kräften solche, welche unabhängig von wahrnehmbaren elektromagnetischen Ursachen sind, und mit irgendwelchen sonstigen physikalischen oder chemischen Zuständen des Körpers verknüpft sind (vgl. I, § 50). Nach der Elektronentheorie ist die eingeprägte Kraft eine äußere, an den Elektronen angreifende Kraft. Da aber nach den Grundhypothesen unserer Theorie nur elektromagnetische Kräfte es sind, welche an den Elektronen angreifen, so müssen wir postulieren, daß die eingeprägten Kräfte erklärt, das heißt auf die elektromagnetischen Kräfte verborgener Felder zurückgeführt werden. Der Standpunkt der Elektronentheorie ist dabei zu vergleichen demjenigen, welchen die Hertzsche Mechanik den mechanischen Kräften gegenüber einnimmt. Ist der Mechanismus der Kraftübertragung nicht wahrnehmbar, so fordert die Hertzsche Mechanik, daß die Kraft auf die Wirkung verborgener Massen zurückgeführt werde. Wie die Hertzsche Mechanik fingierte

träge Massen zuhilfe nimmt, so zieht die Elektronentheorie zur Erklärung der eingeprägten Kräfte fingierte elektrische Felder heran, welche auf die freien oder auf die gebundenen Elektronen wirken. In der Durchführung dieses Grundgedankens bleibt der Hypothese ein weiter Spielraum.

§ 29. Dispersion der elektromagnetischen Wellen.

Wir betrachten einen unmagnetisierbaren homogenen Isolator. Die für einen solchen geltenden Feldgleichungen werden in der Maxwellschen Theorie erhalten, indem $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{i}$ gleich Null, und

$$4\pi \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \quad 4\pi \mathfrak{P} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E} \tag{167}$$

gesetzt wird. Die Dielektrizitätskonstante ε wird dabei als eine für den betreffenden Isolator charakteristische Konstante betrachtet, und die erhaltenen Feldgleichungen werden auch auf die Felder der Lichtwellen angewandt (vgl. I, § 69).

Die Elektronentheorie führt die elektrische Polarisation auf eine Verschiebung der gebundenen Elektronen zurück. Die Proportionalität der Momente der Polarisationselektronen zur elektrischen Feldstärke erklärt sie durch Annahme quasielastischer Kräfte, welche dieselben in ihre Gleichgewichtslagen zurückziehen. Solche quasielastischen Kräfte mußten wir schon früher annehmen (§ 9), um von der Existenz der in der Lichtemission sich kundgebenden Eigenschwingungen Rechenschaft zu geben. Die Eigenschwingungen ergaben sich ohne weiteres aus der Annahme quasielastischer Kräfte und aus der trägen Masse der Elektronen.

Nun waren bekanntlich durch Annahme von Eigenschwingungen in den Molekülen der lichtbrechenden Körper von Sellmeier, Ketteler und Helmholtz die Erscheinungen der Dispersion erklärt worden. Man gelangt zu einer elektromagnetischen Theorie der Dispersion, indem man der trägen Masse der von den Lichtwellen in Schwingungen versetzten elektrischen Teilchen Rechnung trägt. Wir werden bei der Darstellung der Elektronentheorie der Dispersion uns ins-

besondere an H. A. Lorentz[1]), P. Drude[2]) und M. Planck[3]) anschließen.

Wir betrachten eine ebene homogene elektromagnetische Welle, welche in dem homogenen isotropen Dielektrikum parallel der x-Achse fortschreitet; die Welle sei geradlinig, parallel der z-Achse, polarisiert, d. h. die magnetischen Vektoren $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ fallen in die z-Achse, und die elektrischen, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, in die y-Achse. Die Hauptgleichungen (Ib, IIb) ergeben

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t},$$

mithin nach Elimination von $\mathfrak{H}_z$

$$\text{(167a)} \qquad \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{D}_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2}.$$

Für monochromatische Wellen von der Frequenz ν wird nun die Abhängigkeit der Komponenten $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{D}_y$ von x und t durch den komplexen Faktor

$$e^{i\nu\left(t - \frac{nx}{c}\right)}$$

gekennzeichnet sein, wo $\frac{c}{n}$ die Geschwindigkeit der Wellen, n demnach den Brechungsindex des Körpers angibt.

Aus (167a) folgt für diese Wellen:

$$4\pi\mathfrak{D}_y = n^2\mathfrak{E}_y.$$

Akzeptiert man die von der Maxwellschen Theorie behauptete Proportionalität von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ (Gl. 167), so gelangt man zur Maxwellschen Relation $n^2 = \varepsilon$ zurück (vgl. I, S. 308, Gl. 205d). Wenn wir auch diese Beziehung nicht als allgemein gültig annehmen, so müssen wir doch fordern, daß bei gegebener Frequenz ν

$$\text{(167b)} \qquad 4\pi\mathfrak{D} = n^2\mathfrak{E}, \quad 4\pi\mathfrak{P} = (n^2 - 1)\mathfrak{E}$$

---

1) H. A. Lorentz. Ann. d. Phys. 9 (1880), S. 641. La théorie électromagnétique de Maxwell Leide 1892. E. J. Brill. (Arch. Néerl. 25, S. 363—551.)

2) P. Drude. Ann. d. Phys. 48, S. 536, 1893. Ann. d. Phys. 14, S. 677, 1904.

3) M. Planck. Berliner Sitzungsber. 1902, S. 470.

gelte. Denn nur dann folgt aus den Hauptgleichungen auf Grund von (167a) das von der Erfahrung bestätigte Ergebnis, daß in einem homogenen isotropen durchsichtigen Körper monochromatische Lichtwellen von gegebener Frequenz nach allen Richtungen mit der gleichen, von der Lichtstärke unabhängigen Geschwindigkeit sich fortpflanzen. Der Brechungsindex n, der in (167b) eingeht, kann allerdings von der Frequenz der Schwingungen, d. h. von der Wellenlänge des Lichtes abhängen; diese Abhängigkeit bedingt eben Farbenzerstreuung.

Die Elektronentheorie bringt den Brechungsindex in Zusammenhang mit der Zahl und den Eigenschaften der Polarisationselektronen, indem sie die elektrischen Momente derselben mit der Feldstärke verknüpft. Sie geht dabei aus von der Schwingungsgleichung (56, 56a) der freien Eigenschwingungen eines Dipoles, in deren rechte Seite die äußere elektromagnetische Kraft einzuführen ist. Es wird

$$\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + k^2\mathfrak{p} = \frac{e^2}{m}\mathfrak{F}^a. \tag{168}$$

Wir nehmen nur eine einzige Elektronenart als mitschwingend an, und zwar sei p die Zahl der Elektronen im Molekül, N die Zahl der Moleküle im cm^3. Die Polarisation der Volumeinheit wird dann gemäß (161c)

$$\mathfrak{P} = Np \cdot \mathfrak{p}. \tag{168a}$$

Auf den Fall verschiedener Elektronenarten kann man die Entwickelungen ohne Schwierigkeit ausdehnen.

Die auf die Einheit der Ladung berechnete äußere Kraft ist

$$\mathfrak{F}^a = \mathfrak{e}^a + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{h}^a], \tag{168b}$$

wobei unter $\mathfrak{e}^a$ und $\mathfrak{h}^a$ der elektrische und der magnetische Vektor des äußeren Feldes im Äther zu verstehen sind. Den zweiten Term in (168b) pflegt man, wenn kein konstantes äußeres magnetisches Feld mitwirkt und nur das magnetische Feld der Lichtwellen selbst in Frage kommt, gegen den ersten

zu vernachlässigen, indem man die Geschwindigkeit der schwingenden Elektronen als klein gegen die Lichtgeschwindigkeit betrachtet.

Es folgt aus (168) und (168a, b):

$$\frac{d^2\mathfrak{P}}{dt^2} + k^2\mathfrak{P} = Np \cdot \frac{e^2}{m} \cdot \overline{\overline{\mathfrak{e}^a}}. \tag{169}$$

Dabei ist unter $\overline{\overline{\mathfrak{e}^a}}$ ein Mittelwert des Vektors $\mathfrak{e}^a$ zu verstehen; derselbe ist jedoch keineswegs mit dem Mittelwert $\overline{\mathfrak{e}} = \mathfrak{E}$ des vorigen Paragraphen zu verwechseln. Der Mittelwert $\overline{\mathfrak{e}}$ bezog sich nämlich auf ein physikalisch unendlich kleines Volumelement des Raumes; der Mittelwert $\overline{\overline{\mathfrak{e}^a}}$ ist nur für diejenigen Raumpunkte zu bilden, in welchen sich mitschwingende Elektronen befinden. Auch handelt es sich nicht um den totalen Wert des Vektors $\mathfrak{e}$, vielmehr ist in $\mathfrak{e}^a$ das vom Elektron selbst erregte Feld fortgefallen. Die Berechnung des Mittelwertes $\overline{\overline{\mathfrak{e}^a}}$ erfordert einige Überlegung.

Wir legen um den Punkt, für welchen $\mathfrak{e}^a$ berechnet werden soll, eine Kugel mit dem physikalisch unendlich kleinen Radius R; es heißt das, es soll R klein gegen die Wellenlänge sein und doch die Kugel eine große Zahl von Elektronen einschließen. Da R klein gegen die Wellenlänge ist, so werden innerhab der Kugel, und auch auf ihrer Oberfläche, die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$ konstant sein. Zu dem Vektor $\mathfrak{e}^a$ werden nun erstens diejenigen Elektronen einen Beitrag liefern, die innerhalb der Kugel sich befinden, und zweitens diejenigen außerhalb der Kugel. Den letztgenannten Bestandteil der elektrischen Kraft bestimmen wir, indem wir aus dem Innern der Kugel die Elektronen fortgeschafft denken; nach Fortschaffung aller Elektronen aus dem Innern der Kugel weicht das Feld im Innern von dem Felde $\mathfrak{E}$ der Lichtwellen im Körper nur aus dem Grunde ab, weil sich jetzt auf ihrer Oberfläche eine Schicht freier Ladungen befindet. Die Einwirkung dieser Schicht können wir, da der Radius der Kugel klein gegen die Wellenlänge ist, auf Grund elektrostatischer Betrachtungen ermitteln. Wir hatten in Bd. I, § 42 eine ähn-

liche Aufgabe gelöst; wir hatten das von einer homogen polarisierten Kugel erregte Feld bestimmt und es im Innern gleich $-\frac{4\pi}{3}\cdot\mathfrak{P}$ gefunden (Gleichung 144b, S. 161). Nun ist die Feldstärke durch die freien Ladungen bestimmt; in dem vorliegenden Falle, wo außerhalb der Kugel die konstante Polarisation $\mathfrak{P}$ herrscht und das Innere der Kugel nicht polarisiert ist, ist die Dichte der freien Elektrizität auf der Kugelfläche offenbar die entgegengesetzte, wie in dem damals behandelten Falle, wo das Kugelinnere homogen polarisiert, das Äußere aber nicht polarisiert war. Es gibt demnach

$$\mathfrak{E}+\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$$

den Wert von $\mathfrak{e}^a$ an, den man erhält, wenn man diejenigen Kräfte nicht berücksichtigt, die von den Elektronen innerhalb der Kugel herrühren. Für den Mittelwert der Summe dieser von den Polarisationselektronen der benachbarten Moleküle ausgeübten Kräfte setzt nun H. A. Lorentz $4\pi s\mathfrak{P}$, wo s eine Konstante bedeutet, und erhält so

$$\overline{\overline{\mathfrak{e}^a}}=\mathfrak{E}+4\pi\left(\frac{1}{3}+s\right)\mathfrak{P}. \tag{169a}$$

Für feste Körper, bei denen man eine geordnete Lagerung der Moleküle und Elektronen anzunehmen hat, wird im allgemeinen eine von den Momenten der benachbarten Moleküle und Elektronen herrührende Kraft zu berücksichtigen sein. Bei Flüssigkeiten und Gasen hingegen, wo regellose Änderungen in der Gruppierung der Moleküle stattfinden, wird es gestattet sein, mit M. Planck anzunehmen, daß die Einwirkungen der innerhalb der Kugel befindlichen Elektronen sich im Mittel aufheben und s demnach gleich Null zu setzen. Wir ziehen es indessen vor, die Konstante s beizubehalten. Wir umfassen dann auch die Theorie von P. Drude, in welcher $\overline{\overline{\mathfrak{e}^a}}$ einfach mit der Feldstärke $\mathfrak{E}$ der Lichtwellen identifiziert wird; der Drudesche Ansatz geht aus dem Lorentzschen hervor, indem

$$s=-\frac{1}{3}$$

gesetzt wird.

Unter Annahme rein periodischer Schwingungen von der Frequenz ν folgt aus (169) und (169a)

$$(169\text{b}) \qquad (k^2 - \nu^2)\,\mathfrak{P} = Np \cdot \frac{e^2}{m}\left\{\mathfrak{E} + 4\pi\left(\frac{1}{3} + s\right)\mathfrak{P}\right\}.$$

Hieraus, in Verbindung mit (167b), erhalten wir

$$(k^2 - \nu^2)\cdot(n^2 - 1) = 4\pi\, Np \cdot \frac{e^2}{m}\left\{1 + (n^2-1)\left(\frac{1}{3} + s\right)\right\}.$$

Die Konstante k der Schwingungsgleichung (168) ist nichts anderes, als die Frequenz der Eigenschwingungen der Polarisationselektronen. Führen wir statt der Frequenzen k, ν der Eigenschwingungen und der erzwungenen Schwingungen deren im leeren Raume gemessenen Wellenlängen ein:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\nu},$$

so wird

$$(170) \qquad \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{3} + s = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{1}{\lambda_0^{\,2}} - \frac{1}{\lambda^2}\right\},$$

wo

$$(170\text{a}) \qquad \gamma = \frac{Npe^2}{\pi c^2 m}$$

gesetzt ist.

Die Dispersionsformel (170) drückt die Änderung des Brechungsindex n mit der Wellenlänge r aus. Setzt man $s = 0$, so wird

$$(170\text{b}) \qquad \frac{n^2+2}{n^2-1} = \frac{3}{\gamma}\left\{\frac{1}{\lambda_0^{\,2}} - \frac{1}{\lambda^2}\right\}.$$

Da γ der Zahl N der Moleküle proportional ist, so muß bei einer Dichteänderung des Körpers für Licht bestimmter Farbe die Funktion $n^2 - 1/n^2 + 2$ des Brechungsexponenten der Dichte proportional variieren, wenn anders die Zahl der mitschwingenden Elektronen im Molekül und die Wellenlänge ihrer Eigenschwingung bei der Dichteänderung sich nicht ändern. Dieses Lorentz-Lorenzsche Gesetz hat sich vielfach bestätigt gefunden. Es hat sich auch ergeben, daß für Mischungen die Größe $n^2 - 1/n^2 + 2$ sich aus den Beiträgen der Komponenten nach der Mischungsregel berechnen

läßt. Auch auf chemische Verbindungen hat man diese Regel angewandt und in vielen Fällen bestätigt gefunden. Man darf in solchen Fällen annehmen, daß die Polarisationselektronen am Atome haften und daß ihre Zahl und ihre Eigenschwingung bei der chemischen Bindung der Atome erhalten bleibt.

Wir schreiten zur Diskussion der Dispersionsformel (170). Wir unterscheiden dabei verschiedene Fälle.

A) λ_0 klein gegen λ. Hier kommt auf der rechten Seite von (170) das mit λ veränderliche Glied nicht in Betracht und es ergibt sich für die linke Seite ein positiver, konstanter Wert. Eigenschwingungen, die sehr weit nach der ultravioletten Seite hin von dem betrachteten Spektralbereich entfernt liegen, ergeben demnach zwar eine Brechung, aber keine Dispersion; das hängt damit zusammen, daß die Trägheit der mitschwingenden Teilchen nicht in Betracht kommt, wenn die Frequenz klein gegen die Frequenz der Eigenschwingungen ist.

B) $\lambda_0 < \lambda$. Die rechte Seite von (170) ist positiv und nimmt mit abnehmendem λ ab. Es nimmt daher, wenn man sich von der roten Seite her der Wellenlänge λ_0 der Eigenschwingung nähert, der Brechungsindex zu, d. h. es liegt der Fall der normalen Dispersion vor.

C) $\lambda_0 > \lambda$. Beim Durchgang durch den Wert $\lambda = \lambda_0$ wechselt die rechte Seite von (170) das Vorzeichen, sie wird negativ und nimmt, bei weiterem Fortschreiten zu kleineren Wellenlängen, dem Betrage nach zu. Es muß demnach, nach Drude $\left(s = -\frac{1}{3}\right)$ genau, nach Lorentz und Planck ungefähr bei der Wellenlänge der Eigenschwingung, $n^2 - 1$ von beträchtlichen positiven zu negativen Werten übergehen. Die Wellenlängen, die auf der violetten Seite der Eigenschwingung liegen, werden also schwächer gebrochen, als die auf der roten Seite liegenden. So erklärt man die anomale Dispersion. Beim weiteren Fortschreiten nach der violetten Seite des Spektrums nimmt der Brechungsindex wieder zu, indem er dem Werte 1 zustrebt.

D) λ_0 groß gegen λ. Der Wert 1 des Brechungsindex ist nahezu erreicht. Die Eigenschwingung beeinflußt den

Brechungsindex überhaupt nicht mehr; es schwingen die Elektronen nicht mehr mit.

Man wird hiernach aus der Gleichheit der Brechungsindizes eines Körpers für zwei verschiedene Wellenlängen schließen dürfen, daß zwischen diesen beiden Wellenlängen keine Eigenschwingung der Elektronen liegt. Insbesondere wird aus der Übereinstimmung des Quadrates des Brechungsexponenten für sichtbares Licht mit der Dielektrizitätskonstante, die beispielsweise bei Luft und Wasserstoff festgestellt ist, zu schließen sein, daß im ultraroten Spektralgebiete keine Eigenschwingungen liegen. P. Drude, der in der zweiten der oben zitierten Arbeiten das Beobachtungsmaterial in umfassender Weise vom Standpunkte der Elektronentheorie aus diskutiert, kommt zu dem Schlusse, daß die ultraroten Eigenschwingungen den trägeren positiven Elektronen, die ultravioletten den mit weit geringerer Trägheit behafteten negativen Elektronen zuzuschreiben sind. Die Dispersion des Wasserstoffes wird man hiernach auf die Anwesenheit negativer Elektronen zurückzuführen suchen, deren Eigenschwingungen im Ultravioletten liegen, und wird mit Rücksicht auf die einfache Bauart der H_2-Moleküle die Annahme einer einzigen schwingungsfähigen Elektronenart hier als berechtigt ansehen dürfen.

Nun hat H. A. Lorentz[1]) die Kettelerschen Messungen an Wasserstoff von 0° Celsius und Atmosphärendruck, wo n nur wenig größer ist als 1, durch die Formel dargestellt:

$$\frac{n^2+2}{n^2-1} = \frac{3}{2(n-1)} = 10707 - \frac{0{,}0739 \cdot 10^{-5}}{\lambda^2}.$$

Die Vergleichung mit (170b) ergibt für Wasserstoff

$$\frac{3}{\gamma} = 0{,}0739 \cdot 10^{-5}.$$

Hieraus und aus (170a) läßt sich die Zahl p der Polarisationselektronen im H_2-Moleküle berechnen.

1) H. A. Lorentz. Akad. van Wetensch. te Amsterdam. Bd. 6. 1897/98, S. 513.

Es ist die Dichte eines Körpers

$$d = N \cdot M \cdot m_H,$$

wo M sein Molekulargewicht, m_H aber die Masse des Wasserstoffatomes ist.

Es folgt demnach, mit Rücksicht auf Gleichung (1),

$$\frac{eN}{c} = \frac{e}{c\,m_H} \cdot \frac{d}{M} = 9660 \cdot \frac{d}{M},$$

und daher aus (170a)

$$\gamma = p \cdot \eta \cdot \frac{9660}{\pi} \cdot \frac{d}{M}. \tag{170c}$$

Es läßt sich auf Grund dieser Gleichung das Produkt von Zahl p und spezifischer Ladung η der negativen Elektronen aus der Konstante γ der Dispersionsformel berechnen, falls nur eine einzige Elektronenart ins Spiel kommt. Für ideale Gase speziell ist allgemein

$$\frac{M}{d} = 2{,}24 \cdot 10^4,$$

so daß

$$p \cdot \eta = 7{,}285 \cdot \gamma \tag{170d}$$

wird.

Für Wasserstoff folgt aus dem angegebenen Werte von γ

$$p \cdot \eta = 2{,}96 \cdot 10^7.$$

Da p eine ganze Zahl sein muß, so kommt man dem aus der Ablenkung der Kathodenstrahlen berechneten Werte von η am nächsten, wenn man mit P. Drude setzt:

$$p = 2, \quad \eta = 1{,}48 \cdot 10^7. \tag{170e}$$

Es sind also im H_2-Moleküle zwei Polarisationselektronen anzunehmen.

Wir haben der Absorption des Lichtes bei Wellenlängen, welche den Eigenschwingungen der Polarisationselektronen entsprechen, nicht Rechnung getragen. Zur Darstellung der Absorption, und auch zur genaueren Verfolgung der Dispersion durch den Absorptionsstreifen hindurch, wäre die Einführung von Dämpfungsgliedern in die Schwingungsgleichung (168)

notwendig. Man kann diese Einführung in verschiedener Weise vornehmen, entweder, indem man mit P. Drude eine der Geschwindigkeit proportionale Reibung ähnlich wie in der gewöhnlichen Mechanik annimmt, oder indem man mit M. Planck auch hier die Dämpfungsglieder als Rückwirkung der Strahlung auffaßt, wobei diese der zweiten Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit proportional werden (vgl. § 9 Gleichung 58 b). In beiden Fällen erklärt sich das Auftreten derselben Linien im Emissionsspektrum und im Absorptionsspektrum auf Grund der allgemeinen Schwingungslehre; die Polarisationselektronen sprechen auf diejenigen Wellen an, welche mit ihren Eigenschwingungen in Resonanz sind.

Wir haben hier nur eine einzige Elektronenart und eine einzige Eigenschwingung angenommen. Man kann die mathematischen Entwickelungen ohne weiteres auf den Fall beliebig vieler Eigenschwingungen ausdehnen, indem man jede Eigenschwingung einer anderen Elektronenart zuschreibt. Es ist aber die Frage, ob diese Darstellung der Wirklichkeit entspricht. Dieselben ungelösten Probleme, welche uns die Emissionsspektra darboten (vgl. § 9), treten uns auch in der Theorie der Absorptionsspektren entgegen.

§ 30. Magnetische Drehung der Polarisationsebene.

In einem früheren Abschnitte (§ 10) hatten wir von den Veränderungen gesprochen, welche die Spektrallinien im magnetischen Felde erfahren. Im einfachsten Falle des normalen Zeeman-Effektes werden parallel den magnetischen Kraftlinien zwei zirkularpolarisierte Wellen ausgesandt; der Unterschied ihrer Frequenzen ist gleich der spezifischen Ladung der Elektronen, multipliziert mit der magnetischen Feldstärke (vgl. 60 d). Diese Veränderung der Eigenschwingungen der Elektronen, die sich in den Emissionsspektren zeigt, kommt nun auch in den Absorptionsspektren zur Geltung. An Stelle einer einzigen Linie des Absorptionsspektrums treten bei Einwirkung eines der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes parallelen magnetischen Feldes deren zwei, in denen die rechts-

bzw. linkszirkulare Welle absorbiert wird. Dem direkten Zeeman-Effekt der Emission tritt der inverse Zeeman-Effekt der Absorption gegenüber. Die Theorie dieser Erscheinung ist von W. Voigt[1]) im Anschlusse an die Drudesche Theorie der Dispersion entwickelt worden. Die dabei sich ergebenden Einzelheiten des Phänomens hat die Beobachtung vielfach bestätigt.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß die Eigenschwingungen der Elektronen auch außerhalb des Resonanzbereiches von Einfluß sind, daß sie nämlich zu einer Dispersion des Lichtes Veranlassung geben. Beim Hinzutreten eines magnetischen Feldes werden nun die Frequenzen der rechts- und linkszirkularen Eigenschwingungen der Elektronen in verschiedener Weise abgeändert. Damit hängt es zusammen, daß parallel den magnetischen Kraftlinien die rechts- und linkszirkularen Komponenten des einfallenden Lichtes mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortgepflanzt werden, und daß so eine Drehung der Polarisationsebene zustande kommt. Die Theorie der magnetischen Drehung der Polarisationsebene wollen wir in diesem Paragraphen behandeln.

Wir schließen Leitungselektronen und Magnetisierungselektronen aus. Die beiden Hauptgleichungen (Ib, IIb) des § 28 ergeben dann

$$\text{curl}\, \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \tag{171}$$

$$\text{curl}\, \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{171a}$$

dabei ist (vgl. 166b) zu setzen

$$4\pi \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}. \tag{171b}$$

Dieses Gleichungssystem ist zu ergänzen durch Einführung der Beziehung, welche den Vektor $\mathfrak{P}$, die auf die Volumeinheit bezogene elektrische Polarisation, mit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ verknüpft. Wir haben im vorigen Paragraphen, von der Schwingungsgleichung (168) ausgehend, diese Beziehung abgeleitet, wobei wir indessen von einer Einwirkung

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 67. S. 345. 1899. Vgl. auch H. A. Lorentz, Congrès international de Physique, III S. 1. Paris 1900.

magnetischer Kräfte auf die Elektronen abgesehen haben. Wir haben jetzt den Einfluß eines konstanten magnetischen Feldes auf die Elektronenschwingungen in Betracht zu ziehen; wir wollen dasselbe der z-Achse parallel annehmen und den Betrag der Feldstärke mit H bezeichnen, zum Unterschiede von der periodisch veränderlichen Feldstärke $\mathfrak{H}$ der Lichtwellen. Die Differentialgleichungen, welche für die Komponenten von $\mathfrak{p}$ gelten, gehen aus den Gleichungen (59a, b, c) der Eigenschwingungen hervor, indem die äußeren elektrischen Kräfte in der im vorigen Paragraphen dargelegten Weise eingeführt werden. An Stelle der Gleichungen (169, 169a) treten dann die folgenden:

$$(171\text{c})\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathfrak{P}_x}{dt^2} + \eta H \dfrac{d\mathfrak{P}_y}{dt} + k^2\mathfrak{P}_x = \dfrac{Npe^2}{m}\left\{\mathfrak{E}_x + 4\pi\left(\dfrac{1}{3} + s\right)\mathfrak{P}_x\right\}, \\ \dfrac{d^2\mathfrak{P}_y}{dt^2} - \eta H \dfrac{d\mathfrak{P}_x}{dt} + k^2\mathfrak{P}_y = \dfrac{Npe^2}{m}\left\{\mathfrak{E}_y + 4\pi\left(\dfrac{1}{3} + s\right)\mathfrak{P}_y\right\}, \end{cases}$$

$$(171\text{d})\quad \frac{d^2\mathfrak{P}_z}{dt^2} + k^2\mathfrak{P}_z = \frac{Npe^2}{m}\left\{\mathfrak{E}_z + 4\pi\left(\frac{1}{3} + s\right)\mathfrak{P}_z\right\}.$$

Wir wollen monochromatische transversale Lichtwellen betrachten, welche sich parallel den Magnetkraftlinien fortpflanzen. Wir suchen demgemäß die Gleichungen durch Annahme homogener ebener Wellen zu erfüllen, in denen die Feldstärken von t und z in der Weise abhängen, wie es durch den komplexen Faktor $e^{i\nu\left(t - \frac{nz}{c}\right)}$ zum Ausdruck gebracht wird. Die longitudinalen Komponenten $\mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{P}_z$ sind dabei gleich Null zu setzen, und es wird, gemäß (171, 171b)

$$n\mathfrak{H}_y = \mathfrak{E}_x + 4\pi\mathfrak{P}_x, \quad -n\mathfrak{H}_x = \mathfrak{E}_y + 4\pi\mathfrak{P}_y,$$

während aus (171a) folgt

$$n\mathfrak{E}_y = -\mathfrak{H}_x, \quad n\mathfrak{E}_x = \mathfrak{H}_y.$$

Durch Elimination von $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$ folgt

$$(172)\quad 4\pi\mathfrak{P}_x = (n^2 - 1)\mathfrak{E}_x, \quad 4\pi\mathfrak{P}_y = (n^2 - 1)\mathfrak{E}_y,$$

welches auch immer der Polarisationszustand der Welle sein mag.

Wir wollen nun unter n' bzw. n'' die Brechungsindizes der rechts- bzw. linkszirkularpolarisierten Wellen verstehen, welche sich im magnetischen Felde fortpflanzen.

Bei Fortpflanzung parallel der z-Achse gilt

$$\mathfrak{H}_y = \pm i\mathfrak{H}_x \tag{172a}$$

und daher

$$\mathfrak{E}_y = \pm i\mathfrak{E}_x, \quad \mathfrak{P}_y = \pm i\mathfrak{P}_x, \tag{172b}$$

wobei das obere Vorzeichen sich auf die rechtszirkulare, das untere auf die linkszirkulare Schwingung bezieht; erstere entspricht einer negativen, letztere einer positiven Drehung um die z-Achse. Die Einführung von (172) und (172b) in (171c) ergibt

$$(n^2 - 1)\left\{k^2 - \nu^2 \mp \nu\eta H\right\} = \frac{4\pi N p e^2}{m}\left\{1 + (n^2 - 1)\left(\frac{1}{3} + s\right)\right\}$$

oder

$$\frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{3} + s = \frac{m}{4\pi N p e^2}\left\{k^2 - \nu^2 \mp \nu\eta H\right\}. \tag{173}$$

Diese erweiterte Dispersionsgleichung bestimmt die Brechungsindizes und somit die Geschwindigkeiten der beiden den Magnetkraftlinien parallel fortgepflanzten zirkularpolarisierten Wellen. Der Klammerausdruck auf der rechten Seite verschwindet für diejenigen Frequenzen ν der Lichtschwingungen, welche den durch das magnetische Feld abgeänderten Frequenzen der Eigenschwingungen der Elektronen entsprechen (vgl. 60b). Da wir indessen die Absorptionsglieder der Schwingungsgleichungen gestrichen haben, so müssen wir uns ein Eingehen auf die innerhalb des Absorptionsstreifens zu beobachtenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten versagen und uns auf solche Schwingungszahlen beschränken, welche von denjenigen der Eigenschwingungen einigermaßen entfernt sind. Hier bedingt der Einfluß des magnetischen Feldes nur eine geringe Abänderung des Brechungsindex.

Verstehen wir unter n die gemeinsame Geschwindigkeit der beiden Wellen vor Erregung des magnetischen Feldes, welche bestimmt ist durch

$$\text{(173a)} \qquad \frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{3}+s=\frac{m}{4\pi N p e^2}\left\{k^2-\nu^2\right\},$$

so darf gesetzt werden

$$(n'-n)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{n^2-1}\right)=\frac{1}{n'^2-1}-\frac{1}{n^2-1}=-\nu\eta H\cdot\frac{m}{4\pi N p e^2},$$

$$(n''-n)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{n^2-1}\right)=\frac{1}{n''^2-1}-\frac{1}{n^2-1}=+\nu\eta H\cdot\frac{m}{4\pi N p e^2}.$$

Da anderseits aus (173a) folgt:

$$\frac{dn}{d\nu}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{n^2-1}\right)=-2\nu\frac{m}{4\pi N p e^2},$$

so erhalten wir

$$\text{(173b)} \qquad \begin{cases} n'=n+\frac{1}{2}\eta H\frac{dn}{d\nu}, \\ n''=n-\frac{1}{2}\eta H\frac{dn}{d\nu}. \end{cases}$$

Durch die Differenz der Brechungsindizes der rechts- und linkszirkularpolarisierten Welle bestimmt sich jetzt die Drehung der Polarisationsebene. Diese Ebene ist durch den magnetischen Vektor $\mathfrak{H}$ der Lichtwelle gegeben, welche durch Superposition zweier rechts- bzw. linkszirkularer Wellen gleicher Amplitude entsteht.

Wir können mit Rücksicht auf (172a) und (173b) schreiben:

$$\mathfrak{H}_x=\frac{A}{2}\left\{e^{i\nu\left(t-\frac{n'z}{c}\right)}+e^{i\nu\left(t-\frac{n''z}{c}\right)}\right\}=Ae^{i\nu\left(t-\frac{nz}{c}\right)}\cos\left(\frac{\nu(n'-n'')z}{2c}\right),$$

$$\mathfrak{H}_y=\frac{A}{2}\left\{ie^{i\nu\left(t-\frac{n'z}{c}\right)}-ie^{i\nu\left(t-\frac{n''z}{c}\right)}\right\}=Ae^{i\nu\left(t-\frac{nz}{c}\right)}\sin\left(\frac{\nu(n'-n'')z}{2c}\right).$$

Wir können demgemäß den Vorgang, der durch Superposition der beiden zirkularpolarisierten Wellen entsteht, auffassen als eine Fortpflanzung einer geradlinig polarisierten Welle mit der ursprünglichen, durch den Brechungsindex n gekennzeichneten Geschwindigkeit, verbunden mit einer Drehung der Polarisationsebene. Die Polarisationsebene, die für $z=0$ in die (xz)-Ebene fiel, ist nach Durchlaufung der Strecke z um den Winkel

$$\text{(173c)} \qquad \omega=\frac{\nu(n'-n'')z}{2c}$$

in positivem Sinne um die z-Achse gedreht. Die sogenannte „Rotationskonstante“ R, welche durch

$$(174) \qquad \omega = R z H$$

definiert ist, folgt aus (173b):

$$(174a) \qquad R = \frac{\eta}{2c} \frac{\nu dn}{d\nu}.$$

Da sich im vorigen Paragraphen der Differentialquotient des Brechungsindex n nach der Frequenz ν außerhalb des Absorptionsstreifens stets positiv ergeben hat, und da η eine positive den Betrag der spezifischen Ladung der negativen Elektronen anzeigende Konstante ist, so findet die Drehung der Polarisationsebene in positivem Sinne um die mit der magnetischen Feldrichtung zusammenfallende Fortpflanzungsrichtung des Lichtes statt. Es erfolgt also die Drehung der Polarisationsebene im Sinne der elektrischen Ströme, welche den Elektromagneten erregen. Wird der Strom kommutiert, so daß die Richtung des magnetischen Feldes sich umkehrt, und nun der Fortpflanzungsrichtung entgegen gerichtet ist, so kehrt sich auch der Drehsinn der Polarisationsebene um. Behält hingegen das magnetische Feld seine Richtung im Raume bei, während die Strahlrichtung durch Reflexion umgekehrt wird, so geht die Drehung im Raume in demselben Sinne weiter.

Die obige Regel über den Drehsinn der Polarisationsebene gilt natürlich nur dann, wenn die Voraussetzungen zutreffen, aus der wir sie abgeleitet haben, d. h. wenn die magnetische Drehung wirklich auf die Schwingungen der negativen Elektronen allein zurückzuführen ist, und wenn Magnetisierungselektronen ausgeschlossen sind. Bei ferromagnetischen Körpern, z. B. bei Lösungen von Eisensalzen, gilt sie nicht immer. Ebensowenig dürfte sie zutreffen, wenn die ultraroten Eigenschwingungen der positiven Elektronen für die Drehung wesentlich in Betracht kämen, was allerdings infolge ihrer geringen spezifischen Ladung kaum anzunehmen ist.

Wir können (174a) auch schreiben

$$(174b) \qquad R = -\frac{\eta}{2c} \lambda \frac{dn}{d\lambda}.$$

Ist die Dispersionskurve gegeben, so kann hieraus die magnetische Drehung und ihre Abhängigkeit von der Wellenlänge ermittelt werden. Daß die Formel in manchen Fällen zutrifft, hat H. Becquerel[1]) gezeigt; auch aus der Theorie von W. Voigt[2]) ergibt sich die gleiche Formel, allerdings wird dort die multiplikative Konstante nicht in Verbindung mit der spezifischen Ladung der Elektronen gebracht. Dieses hat L. H. Siertsema[3]) nachgetragen und für verschiedene Körper den Wert der spezifischen Ladung der Elektronen aus der beobachteten magnetischen Drehung mit Hilfe jener Formel berechnet. Er findet z. B. für Wasserstoff den Wert

$$\eta = 1{,}77 \cdot 10^7, \tag{174c}$$

welcher mit den aus der Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen und Becquerelstrahlen ermittelten Werten der spezifischen Ladung noch besser stimmt, als der im vorigen Paragraphen aus der Dispersion des Wasserstoffes abgeleitete Wert. Für die anderen untersuchten Körper erhält allerdings Siertsema durchweg kleinere Werte von η.

§ 31. Magnetisierung.

Wie die Elektronentheorie die Beziehungen, welche zwischen der elektrischen Polarisation $\mathfrak{P}$ und der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ bestehen, durch geeignete Annahmen über die Eigenschaften der Polarisationselektronen zu veranschaulichen sucht, so muß sie bestrebt sein, die zwischen der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ und der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ obwaltenden Beziehungen auf die Mitwirkung der Magnetisierungselektronen zurückzuführen. Diese Magnetisierungselektronen sind nahe verwandt den Molekularströmen, durch welche Ampère und Weber die magnetischen Eigenschaften der Körper zu erklären suchten. Ob wirklich der Paramagnetismus und der Diamagnetismus

---

1) H. Becquerel, C. R. 125, S. 679. 1897.

2) W. Voigt, Ann. d. Phys. 67, S. 351. 1899.

3) L. H. Siertsema, Akad. v. Wetensch. te Amsterdam 1902, S. 499.

sich auf umlaufende oder rotierende Elektronen zurückführen läßt, ist von W. Voigt[1]) und P. Langevin[2]) untersucht worden.

Weber hat den Diamagnetismus auf die Molekularströme zurückgeführt, welche beim Entstehen eines magnetischen Feldes in widerstandslosen Bahnen induziert werden sollen. Dem entsprechen nach P. Langevin die Umlaufsbewegungen der Elektronen, welche im Innern der Moleküle beim Entstehen magnetischer Felder erregt werden; dieselben ergeben stets eine diamagnetische Erregung. Größere Schwierigkeiten bietet die Erklärung des Paramagnetismus; hier sind die Stöße und die sonstigen Wechselwirkungen der Moleküle heranzuziehen, und es ist die mittlere Orientierung der Magnetisierungselektronen in einem gegebenen Felde nach den Methoden der Kinetik zu behandeln; für diese Auffassung spricht der Umstand, daß, speziell für Gase, der Paramagnetismus von der Temperatur abhängt, im Gegensatz zu dem von der Temperatur nicht beeinflußten Diamagnetismus.

Zur Deutung mancher magnetooptischer Erscheinungen reicht die Einführung der Polarisationselektronen aus, wie wir im vorigen Paragraphen dargelegt haben. Gewisse magnetooptische Eigenschaften der ferromagnetischen Körper indessen, insbesondere diejenigen, welche der Magnetisierung parallel gehn, erfordern die Heranziehung der Magnetisierungselektronen.[3]) Was das Verständnis des Ferromagnetismus überhaupt anbelangt, so hat die Elektronenhypothese bisher leider keine Erfolge zu verzeichnen. Wir sind noch weit davon entfernt, die Anomalien der ferromagnetischen Körper vom Standpunkte der Elektronentheorie aus deuten zu können.

§ 32. **Elektrische Leitung.**

Nach der Elektronentheorie beruht die Eigenschaft gewisser Körper, den elektrischen Strom zu leiten, auf der An-

---

1) W. Voigt, Götting. Nachr. 1901 S. 169. Ann. d. Phys. 9, S. 115. 1902

2) P. Langevin, C. R. 139, S. 1204. 1904. Ann. de chim. et phys. 1905. S. 70.

3) Vgl. P. Drude, Lehrbuch d. Optik. Leipzig 1900. Kapitel VII.

wesenheit von „Leitungselektronen“, d. h. von elektrischen Teilchen, welche unter der Einwirkung elektrischer Felder über größere Strecken hin wandern. Diese Elektronen können mit der Masse materieller Atome beladen sein, wie bei Elektrolyten, oder sie können frei, d. h. nur mit der ihnen eigenen, elektromagnetischen Masse behaftet sein. Gerade in den besten Leitern, den Metallen, wird man freie Elektronen als Stromträger anzunehmen haben. Wie wir bereits mehrfach erwähnt haben (I, S. 192 u. 206), sind von E. Riecke[1]) und insbesondere von P. Drude[2]) Vorstellungen über die Bewegung der Elektronen im Metalle entwickelt worden, welche der kinetischen Theorie der Gase nachgebildet sind. Fehlen äußere elektrische Kräfte, so sollen die Elektronen sich regellos bewegen, ähnlich wie die Moleküle eines Gases; die mittlere lebendige Kraft eines Elektrons soll gleich derjenigen sein, welche einem Gasmoleküle bei der gleichen Temperatur zukommt. Wir bezeichnen mit α die mittlere lebendige Kraft eines Moleküles oder Elektrons bei der absoluten Temperatur $\vartheta = 1$ (Boltzmann-Drudesche Konstante) und setzen

$$\frac{1}{2} m \overline{\mathfrak{v}^2} = \alpha \vartheta.$$

Die Elektronen sollen Zickzackbahnen beschreiben; der Stoß, durch den die Bewegungsrichtung geändert wird, kann entweder zwischen den Elektronen selbst erfolgen, oder an den neutralen Molekülen, welche gewissermaßen das feste Gerüst des Metalles bilden.

Welches wird nun der Einfluß eines elektrischen Feldes sein? Es wird die unregelmäßige Wärmebewegung der Elektronen ein wenig abgeändert werden, so daß im Mittel diejenige Bewegungsrichtung überwiegt, nach der die Elektronen durch das Feld getrieben werden. Es sei $\mathfrak{v}_1$ die mittlere Geschwindigkeit der betreffenden Elektronengruppe, l_1 die mittlere freie Weglänge; beim Durchlaufen der freien Weglänge l_1 wird

1) E. Riecke, Ann. d. Phys. 66, S. 353, 545 u. 1199. 1898.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 1, S. 566. 3, S. 369. 1900.

das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ einem Elektron von der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ die zusätzliche Geschwindigkeit erteilen

$$\mathfrak{E} \cdot \frac{e_1}{m_1} \cdot t, \quad 0 < t < \frac{l_1}{|\mathfrak{v}_1|}.$$

Der Mittelwert dieser Geschwindigkeit ist

$$\mathfrak{E} \cdot \frac{e_1}{m_1} \cdot \frac{l_1}{2|\mathfrak{v}_1|} = \mathfrak{E} \cdot \frac{e_1 l_1 |\mathfrak{v}_1|}{2 m_1 \mathfrak{v}_1^2}.$$

Die Multiplikation mit der Ladung e_1 und der auf die Volumeinheit bezogenen Zahl N_1 ergibt als Anteil der Elektronen der betreffenden Gruppe zur Stromdichte:

$$\mathfrak{E} \cdot e_1^2 N_1 \frac{l_1 |\mathfrak{v}_1|}{2 m_1 \mathfrak{v}_1^2} = \mathfrak{E} \cdot \frac{1}{4 \alpha \vartheta} \cdot e_1^2 N_1 l_1 |\mathfrak{v}_1|,$$

wenn man von den strengen, das Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz berücksichtigenden Methoden der Mittelwertsbildung absieht. Durch Summierung der Anteile der verschiedenen Gruppen folgt die Stromdichte

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{E} \cdot \frac{1}{4 \alpha \vartheta} \left\{ e_1^2 N_1 l_1 |\mathfrak{v}_1| + e_2^2 N_2 l_2 |\mathfrak{v}_2| + \cdots \right\}.$$

Dieselbe ist der Feldstärke proportional, d. h. es gilt das Ohmsche Gesetz, so lange als die zusätzliche, durch das elektrische Feld erteilte Geschwindigkeit der Elektronen klein gegen die mittlere Geschwindigkeit der Wärmebewegung ist; unter dieser der obigen Ableitung zugrunde liegenden Voraussetzung erhält Drude für die Leitfähigkeit den konstanten Wert

$$\sigma = \frac{1}{4 \alpha \vartheta} \left\{ e_1^2 N_1 l_1 |\mathfrak{v}_1| + e_2^2 N_2 l_2 |\mathfrak{v}_2| + \cdots \right\}.$$

Die einfachste Annahme wäre die, daß in den Metallen nur eine Sorte freier, und zwar negativer Elektronen den Strom transportiert. Doch fragt es sich, ob auf Grund dieser Annahme die thermoelektrischen und sonstigen Eigenschaften der Metalle sich befriedigend erklären lassen.

Für die Elektronentheorie der metallischen Leitung spricht es, daß H. A. Lorentz imstande war (vgl. § 41), aus den soeben dargelegten Vorstellungen über die Bewegung der Elek-

tronen das Emissionsvermögen der Metalle für Wärmestrahlen großer Wellenlänge herzuleiten.

In Gasen sind die Vorgänge, welche die elektrische Leitung begleiten, weit verwickelter, als in Metallen. Die freie Weglänge der Elektronen ist hier größer, so daß die durch das elektrische Feld erteilte Geschwindigkeit keineswegs immer klein gegen diejenige der regellosen Wärmebewegung ist. So erklären sich die Abweichungen vom Ohmschen Gesetze, welche bei Gasen oft in recht augenfälliger Weise hervortreten. Auch lagern sich den freien Elektronen neutrale Moleküle in wechselnder Anzahl an, wie in § 1 erwähnt wurde. Dort haben wir die für die allgemeine Theorie der Elektrizität bedeutungsvollen Ergebnisse der neueren Untersuchungen über Gasionen bereits kennen gelernt.

§ 33. Das elektromagnetische Feld hochfrequenter Ströme in linearen Leitern.

Wir hatten bereits in dem einleitenden Kapitel dieses Bandes (§ 8) allgemeine Sätze über die Fortpflanzung elektromagnetischer Störungen kennen gelernt. Wir waren dabei ausgegangen von den Feldgleichungen (I bis IV) der Elektronentheorie, und hatten diese mit Hilfe der elektromagnetischen Potentiale, und noch übersichtlicher mit Hilfe des Hertzschen Vektors $\mathfrak{Z}$, gelöst. War die Dichte $\mathfrak{k} = \frac{\varrho \mathfrak{v}}{c}$ des Konvektionsstromes der Elektronen gegeben, so ließ sich auf Grund von (47, 48, 48c, d) das elektromagnetische Feld der bewegten Elektronen ermitteln.

In der Bezeichnungsweise, deren wir uns jetzt bedienen, werden die elektromagnetischen Vektoren der von den einzelnen Elektronen erregten Felder durch $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{h}$ vorgestellt. Aus den Feldgleichungen (I bis IV) der Elektronentheorie haben wir in § 28 durch Mittelwertsbildung die Differentialgleichungen (Ia bis IVa) abgeleitet; dieselben verknüpfen die Mittelwerte $\bar{\mathfrak{e}}$, $\bar{\mathfrak{h}}$ mit den Mittelwerten der Dichten der Elektrizität und des Konvektionsstromes genau so, wie durch die ursprünglichen Gleichungen

(I bis IV) die Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}$ mit den Dichten selbst verknüpft waren. Wir können also dasjenige, was wir aus diesen Feldgleichungen ableiteten, ohne weiteres auf die durch Mittelwertsbildung entstandenen Gleichungen (Ia bis IVa) übertragen. Erinnern wir uns ferner, daß wir durch (166) und (166a) $\bar{\mathfrak{e}}$ mit $\mathfrak{E}$, $\bar{\mathfrak{h}}$ mit $\mathfrak{B}$ identifiziert haben, so erhalten wir

$$(180) \qquad \mathfrak{B} = \operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}, \quad l = ct.$$

$$(180\text{a}) \qquad \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial l^2}.$$

Dabei ist $\mathfrak{E}_0$ die beobachtbare Feldstärke des anfänglichen elektrostatischen Feldes. Es bestimmen sich die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ und die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ zu einer beliebigen Zeit, wenn der Hertzsche Vektor bekannt ist. Dieser aber berechnet sich aus den (47) und (48) bzw. (51c) entsprechenden Beziehungen

$$(180\text{b}) \qquad \bar{\mathfrak{q}} = \int_0^l \bar{\mathfrak{k}}\, dl = \int_0^t \overline{\varrho \mathfrak{v}}\, dt,$$

$$(180\text{c}) \qquad \mathfrak{Z}(o, l) = \int_0^\infty \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \bar{\mathfrak{q}}\,(\lambda, l - \lambda).$$

Als Mittelwert der elektrischen Stromdichte in ruhenden Körpern ist dabei der in (165b) angegebene Ausdruck einzutragen:

$$(180\text{d}) \qquad \overline{\varrho \mathfrak{v}} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + c \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{M},$$

der zusammengesetzt ist aus den von den Leitungselektronen, den Polarisationselektronen und den Magnetisierungselektronen herrührenden Stromanteilen. Von jedem Volumelemente des Raumes, in welchem das Zeitintegral (180b) dieses Vektors von Null verschieden ist, wird ein Beitrag zum Hertzschen Vektor beigesteuert; derselbe eilt mit Lichtgeschwindigkeit nach dem Aufpunkte hin, wobei sein Betrag sich in einem, dem zurückgelegten Latenswege umgekehrt proportionalen Maße verringert.

Es ist zweckmäßig, den Hertzschen Vektor in derselben Weise zu schreiben, in welcher durch (50b, 51b) die elektromagnetischen Potentiale ausgedrückt wurden, nämlich:

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{dv}{r} \{\bar{\mathfrak{q}}\}_{t-\frac{r}{c}} \cdot \tag{180e}$$

Die Integration ist hier über die von Elektrizität durchströmten Volumelemente des ganzen Raumes auszudehnen.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß die Beziehungen (180) bis (180e) sich auch aus den Hauptgleichungen (Ib bis IVb) der Maxwellschen Theorie hätten herleiten lassen, von deren Identität mit den Gleichungen (Ia bis IVa) wir uns ja in § 28 überzeugt haben. In der Tat sind die physikalischen Voraussetzungen, auf denen die Entwickelungen dieses Paragraphen und des nächstfolgenden beruhen, diejenigen der Maxwellschen Theorie. Die Hypothesen der Elektronentheorie kommen dabei nicht ins Spiel. Wir waren bei der Darlegung der Theorie der elektrischen Schwingungen im ersten Bande dieses Werkes auf die Strahlung eines Stromsystemes nicht eingegangen; wir hatten versprochen, im zweiten Bande diese Lücke auszufüllen. Die allgemeinen Sätze über die Ausbreitung elektromagnetischer Störungen, die uns in der Mechanik der Elektronen von so großem Nutzen waren, gestatten es uns, jenes Versprechen zu erfüllen und nunmehr jene für die drahtlose Telegraphie fundamentalen Fragen zu erledigen.

Wir denken uns ein System elektrischer Schwingungskreise; dasselbe sei von beliebigen, polarisierbaren und magnetisierbaren Körpern umgeben. Es werde, etwa durch den elektrischen Funken, plötzlich ein Schwingungsvorgang ausgelöst. Welches elektromagnetische Feld wird erregt?

Die Gleichungen (180) bis (180e) bestimmen die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ des gesuchten Feldes. Freilich bedürfen wir zur Berechnung von $\bar{\mathfrak{q}}$ der Kenntnis nicht nur des Leitungsstromes, sondern auch der Magnetisierung und des an der Materie haftenden Anteiles des Verschiebungsstromes. Meist werden wir die Stromverteilung in den Leiterkreisen und die

elektrische Polarisation und die Magnetisierung der umgebenden Isolatoren nicht von vornherein kennen; wir werden vielmehr meist diese selbst als Unbekannte anzusehen haben, die sich erst nachträglich aus der Kenntnis des Feldes ergeben. Unter diesen Umständen reichen jene Gleichungen zur Lösung der gestellten Aufgabe nicht aus.

Wir können indessen die Gleichungen (180) bis (180e) verwerten, wenn wir die Problemstellung passend spezialisieren. Wir wollen annehmen, daß die Schwingungskreise sich im leeren Raume befinden, oder, was praktisch auf dasselbe herauskommt, im Luftraume; alsdann fallen die von der Polarisation und der Magnetisierung der Körper herrührenden Stromanteile fort, es bleibt nur der Leitungsstrom übrig. Dieser soll nun in linearen Leitern fließen, d. h. in Drähten, deren Querschnittsabmessungen klein sind, sowohl gegen die Länge der Drähte, als auch gegen die Wellenlänge der in den Raum entsandten elektromagnetischen Wellen. Handelt es sich dann um die Bestimmung des elektromagnetischen Feldes in Aufpunkten, deren Entfernung von den Leitern groß gegen deren Querschnittsabmessungen ist, so kommt es auf die Verteilung des Stromes J über den Querschnitt des Leiters nicht an. Es kann, wenn dv das Volumen eines zylindrischen Leiterstückes und $d\mathfrak{s}$ ein Element seiner Leitlinie bezeichnet, gemäß (180b, d) gesetzt werden

$$\bar{\mathfrak{q}}\,dv = \int_0^t \mathfrak{i}\,dv\,dt = d\mathfrak{s}\int_0^t J\,dt$$

oder

$$\bar{\mathfrak{q}}\,dv = q\,d\mathfrak{s};$$

dabei ist

$$q = \int_0^t J\,dt \tag{181}$$

die seit Beginn des Schwingungsvorganges durch den betreffenden Querschnitt hindurchgeströmte Elektrizitätsmenge. Es folgt aus (180e)

(181a) $$\mathfrak{Z} = \int \frac{d\mathfrak{s}}{r} \{\mathfrak{q}\}_{t-\frac{r}{c}} = \int d\mathfrak{s} \frac{q(l-r)}{r}$$

als Wert des Hertzschen Vektors in einem Aufpunkte, dessen Entfernung r von den stromdurchflossenen Drähten groß gegen die Querschnittsabmessungen ist; dieser Wert stellt sich dar als ein längs der Leitlinien aller stromdurchflossenen linearen Leiter erstrecktes Integral, und zwar hängt der von den Stromelementen beigesteuerte Beitrag von dem Werte von q ab, welcher in einem um die Latenszeit $\frac{r}{c}$ zurückliegenden Momente die bis dahin durchgeströmte Elektrizitätsmenge angab.

Wir erhalten übrigens aus (48a) und (181, 181a) für das elektromagnetische Vektorpotential den Ausdruck

(181b) $$\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l} = \frac{1}{c} \int \frac{d\mathfrak{s}}{r} \{J\}_{t-\frac{r}{c}}.$$

Diese Formel können wir der Formel (168a) in Bd. I, S. 220 an die Seite stellen, welche das Vektorpotential eines stationären Stromes in einem linearen Leiter bestimmt. Wir haben hier μ gleich 1 gesetzt, weil wir von dem Felde im leeren Raume reden, wo curl $\mathfrak{A}$ sowohl $\mathfrak{B}$ wie $\mathfrak{H}$ gleich ist. Der wesentliche Unterschied der beiden Formeln jedoch liegt darin, daß dort die jeweilige Stromstärke in Rechnung gezogen wurde, während hier die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der von den Stromelementen ausgehenden Wirkungen berücksichtigt ist. Auch durfte dort, weil ein stationärer Strom stets ein geschlossener Strom ist, welcher durch alle Querschnitte dieselbe Elektrizitätsmenge führt, J vor das Integralzeichen gesetzt werden. Das ist hier nicht ohne weiteres erlaubt; ein nicht stationärer Strom kann durch verschiedene Querschnitte eines Leiters verschiedene Elektrizitätsmengen transportieren, wobei eine Anhäufung von Elektrizität an der Oberfläche des Drahtes stattfindet. Der nicht stationäre Strom braucht auch keineswegs ein geschlossener zu sein. Wir können uns etwa die Enden des Leitungsdrahtes in die einander gegenüberliegenden Platten eines Kondensators mündend vorstellen, oder auch frei endigend. In jedem Falle kann das magnetische Feld aus (181b) er-

mittelt werden. Wir erhalten aus dieser Formel ein Urteil über den Gültigkeitsbereich der Theorie des quasistationären Stromes (vgl. Bd. I, Abschn. III, Kap. 2), welche auf der Formel (I, 168a) beruht, und werden befähigt, die Theorie auf hochfrequente Ströme in linearen Leitern anzuwenden, die weder als quasistationär, noch als geschlossen gelten können. Bei schnellen Schwingungen ist das magnetische Feld unzertrennlich mit dem elektrischen verknüpft, wie ja auch an Stelle des skalaren elektrostatischen Potentiales bzw. des magnetischen Vektorpotentiales die beiden elektromagnetischen Potentiale treten, die sich dem Hertzschen Vektor unterordnen (vgl. 48a, b).

Auf Grund von (181a) bestimmen wir durch die Gleichungen

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}, \tag{181c}$$

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial l^2} \tag{181d}$$

das Feld der elektromagnetischen Störung im Luftraume, welche von schnellen elektrischen Schwingungen in linearen Leitern erregt wird. Insbesondere beherrschen wir so die Theorie der entsandten Wellen, die in der drahtlosen Telegraphie zur Übertragung der telegraphischen Zeichen verwandt werden.

Wir wenden die allgemeinen Ansätze auf einen Schwingungskreis an, dessen Abmessungen klein gegen die Wellenlänge der entsandten Wellen sind. Dieser Bedingung genügt die in Bd. I, § 66 behandelte Anordnung: Ein Kondensator, dessen Platten durch einen Leitungsdraht verbunden sind. Hier kann der Strom als quasistationär betrachtet werden, falls die Kapazität der Leitung gegen diejenige des Kondensators verschwindet, und es hat die Stromstärke J und deren Zeitintegral q für alle Querschnitte der Leitung den gleichen Betrag. Verstehen wir unter e die jeweilige Ladung derjenigen Kondensatorplatte, in welcher die Leitung endigt, so gilt nach (181)

$$q = \int_0^t J\,dt = e - e_0. \tag{182}$$

19*

Dabei ist e_0 die anfängliche Ladung jener Kondensatorplatte; die jeweilige und die anfängliche Ladung der ihr gegenüberstehenden Platte, in welcher die Leitung beginnt, sind $-e$ bzw. $-e_0$.

Wir denken uns einen Aufpunkt, dessen Entfernung von dem Schwingungskreise groß ist gegen die Abmessungen des Kreises. Die Entfernung braucht darum noch nicht groß gegen die Wellenlänge zu sein. Die Entfernung r dieses Aufpunktes von den einzelnen Punkten der Drahtleitung ist merklich die gleiche; es kann daher in (181a) diese Entfernung vor das Integralzeichen gesetzt werden. Dasselbe gilt von $q(l-r)$; denn es sollen die Abmessungen des Kreises, und demnach die Differenzen der Latenswege, klein gegen die Wellenlänge sein, die Schwingungsphasen sind mithin für alle Punkte der Leitung zur Zeit des Entsendens merklich die gleichen. Wir erhalten

$$\mathfrak{Z} = \frac{q(l-r)}{r} \cdot \int d\mathfrak{s}. \tag{182a}$$

Die hier eingehende Vektorsumme aller Elemente des linearen Leiters kann, gemäß den allgemeinen Regeln der Vektoraddition, durch einen einzigen Vektor ersetzt werden, welcher direkt von dem Anfangspunkt der Leitung zu ihrem Endpunkte führt.

Verstehen wir unter $\mathfrak{p}$ das Moment des Dipoles, welcher durch zwei in diesen Punkten befindliche Ladungen $\pm e$ gebildet wird, so können wir schreiben

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r} - \frac{\mathfrak{p}_0}{r}. \tag{182b}$$

Das ursprüngliche elektrostatische Feld der Ladungen $\pm e_0$ wird gemäß Bd. I S. 63 Gl. (81) gegeben durch

$$\mathfrak{E}_0 = -\nabla\varphi, \quad \varphi = -\left(\mathfrak{p}_0, \nabla_a \frac{1}{r}\right) = -\operatorname{div}\left(\frac{\mathfrak{p}_0}{r}\right).$$

Es folgt demnach aus (181c, d) für das elektromagnetische Feld des Schwingungskreises

$$(182\text{c})\qquad \mathfrak{H} = \operatorname{curl} \frac{\partial}{\partial l}\left\{\frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r}\right\},$$

$$(182\text{d})\qquad \mathfrak{E} = \nabla \operatorname{div}\left\{\frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r}\right\} - \frac{\partial^2}{\partial l^2}\left\{\frac{\mathfrak{p}(l-r)}{r}\right\}.$$

Lassen wir endlich die z-Achse mit der Achse des Dipoles zusammenfallen, so erkennen wir, daß die erhaltenen Formeln durchaus identisch sind mit den Formeln (53, 53a, b) des § 9. Dort wird der periodische Wechsel des elektrischen Momentes des Dipoles durch die Schwingungen eines Elektrons veranlaßt, hier durch den quasistationären Leitungsstrom in dem Drahte, welcher die Kondensatorplatten verbindet. In Entfernungen, die groß sind gegen die Abmessungen des Systemes, kommt es, wie wir sehen, nicht auf die Konfiguration des Systemes im einzelnen, sondern nur auf das resultierende Moment an. Wir können die Formeln (53c, d), durch welche wir dort das Feld darstellten, ohne weiteres auf den vorliegenden Fall übertragen. Zusammenfassend können wir sagen: Das elektromagnetische Feld des quasistationären Stromes in einem linearen Leiter, welcher die Platten eines Luftkondensators verbindet, läßt sich in Entfernungen, die groß gegen die Abmessungen des Leiters sind, ersetzen durch das Feld eines Dipoles, dessen Achse der vom Anfangspunkt der Leitung direkt zum Endpunkt gezogene Fahrstrahl, und dessen Ladungen die Ladungen $\pm e$ der Kondensatorplatten sind.

Wir durften unsere Formeln nur auf einen Luftkondensator anwenden, weil wir bei der Berechnung des Hertzschen Vektors in (180d) nur den Leitungsstrom berücksichtigt hatten, aber nicht die von der Polarisation und der Magnetisierung der umgebenden Körper herrührenden Stromanteile. Wie ändern sich die Ergebnisse unserer Betrachtungen, wenn man an Stelle des Luftkondensators einen Kondensator setzt, der mit einem dielektrischen Körper gefüllt ist? Dann ist der an der Materie haftende Bruchteil $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ des Verschiebungsstromes dem Leitungsstrome hinzuzufügen. Die elektrische Verschiebung

ist nun von der mit der Ladung $+e$ versehenen Platte durch das Dielektrikum nach der mit der Ladung $-e$ versehenen gerichtet. Der Verschiebungsstrom ergänzt den Leitungsstrom im Drahte zu einer geschlossenen Strömung, er ist dem Stromelemente, das von der Ladung $-e$ nach $+e$ geht und welches den Leitungsstrom hinsichtlich der Fernwirkung ersetzt, entgegen gerichtet. Würde der gesamte Verschiebungsstrom in Rechnung zu setzen sein, so würde seine Fernwirkung diejenige des Leitungsstromes gerade aufheben. Da aber nur der Bruchteil $1 - \frac{1}{\varepsilon}$ in Rechnung zu ziehen ist, so wird die Fernwirkung nicht aufgehoben, sondern nur im Verhältnis $1 : \varepsilon$ verringert. Wir können das Ergebnis auch so ausdrücken: Ist der Raum zwischen den Kondensatorplatten mit einer dielektrischen Substanz erfüllt, so ist für die Fernwirkung das Moment der freien Ladungen der Kondensatorbelegungen maßgebend.

Für die drahtlose Telegraphie ist die Kenntnis der Feldstärken in der Wellenzone von Wichtigkeit; diese bildet sich in Entfernungen vom Schwingungskreis, die groß gegen die Wellenlänge sind. Die Feldstärken des Dipoles werden hier durch (54) gegeben; sie sind am größten in Richtungen senkrecht zur Achse des Dipoles. Hier wird

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{1}{r} \cdot \left\{\frac{d^2\mathfrak{p}}{dl^2}\right\}_{l-r}.$$

Die elektrische Feldstärke ist dabei parallel, die magnetische senkrecht zur Achse des Dipoles gerichtet. Ist d der Abstand der Kondensatorplatten, d. h. der Abstand der einander gegenüberliegenden Enden der Leitung, so wird speziell für einfach harmonische Schwingungen von der Schwingungszahl ν (in 2π Sekunden)

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{ed}{\varepsilon r} \cdot \frac{\nu^2}{c^2}. \tag{182e}$$

Die Wellenamplitude ist proportional der Ladungsamplitude und dem Abstand der Kondensatorplatten, sowie dem Quadrate der Schwingungszahl, umgekehrt

proportional der Dielektrizitätskonstanten und der Entfernung.

Man könnte nun daran denken, die Tragweite der funkentelegraphischen Signale dadurch zu vergrößern, daß man die Kapazität des Kondensators steigerte; denn die Ladungsamplitude e ist ja gleich dem Produkte aus der Spannungsamplitude, welche durch die Schlagweite der Funkenstrecke bestimmt ist, und aus der Kapazität. Nun ist aber, wie aus Formel (I, S. 282, Gl. 192c) hervorgeht, bei gegebener Selbstinduktion der Leitung ν^2 umgekehrt proportional der Kapazität K des Kondensators. Vergrößert man die Kapazität, indem man d und ε konstant hält, d. h. indem man die Fläche der Kondensatorplatten vergrößert, so bleibt trotz der Vergrößerung der Ladungsamplitude die Wellenamplitude die gleiche. Erreicht man jedoch die Steigerung der Kapazität durch Verringerung des Plattenabstandes d oder durch Wahl eines Isolators von größerer Dielektrizitätskonstante ε, so verkleinert man sogar die Amplitude der entsandten Wellen. Der Vergrößerung der im Schwingungskreise aufgespeicherten Energie entspricht mithin keineswegs eine Steigerung der ausgestrahlten Energie.

Überhaupt ist die Verwendung nahezu geschlossener Kreise und quasistationärer Ströme für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie nicht günstig. Bei einer solchen Anordnung zerstören sich, wie wir gesehen haben, die Beiträge der einzelnen Stromelemente fast vollständig, während im Gegenteil eine Verstärkung der von den einzelnen Stromelementen herrührenden Wellen anzustreben ist. Das Zusammenwirken der Wellen aller Stromelemente wird am vollständigsten erreicht bei den geradlinigen Sendeantennen, die man in der drahtlosen Telegraphie verwendet. Mit ihrer Theorie wird sich der nächste Paragraph beschäftigen.

Wir wollen, um Mißverständnisse auszuschließen, nochmals betonen, daß die in den Gleichungen (182, 182a) vorgenommene Spezialisierung nur dann erlaubt ist, wenn die Abmessungen des nahezu geschlossenen Kreises klein gegen die Wellenlänge sind; nur in diesem Falle setzen sich die von

den einzelnen Stromelementen erregten Wellen zu einer einzigen Welle zusammen, welche von der Lücke der Leitung auszugehen scheint. Hat man es hingegen mit einem nahezu geschlossenen Kreise zu tun, dessen Abmessungen nicht klein gegen die Wellenlänge sind (z. B. einem Hertzschen Resonator ohne eingeschaltete Kapazität), so hat man den Hertzschen Vektor aus den allgemeineren Gleichungen (181, 181a) zu berechnen. Die Stromstärke J und ihr Zeitintegral q haben hier keineswegs für alle Querschnitte den gleichen Wert, da die Kapazität der Leitung nicht zu vernachlässigen ist. Auch haben die Beiträge, die, von verschiedenen Stromelementen des Kreises entsandt, gleichzeitig in einem entfernten Aufpunkte eintreffen, in diesem Falle Latenswege zurückgelegt, deren Differenzen von der Ordnung der Wellenlänge sind; es sind demnach für die einzelnen Stromelemente verschiedene Schwingungsphasen in Betracht zu ziehen. Aus diesen Gründen ist es nicht gestattet, die Fernwirkung eines geschlossenen Schwingungskreises allgemein gleich Null zu setzen, und die Fernwirkung einer ungeschlossenen Leitung stets von den Enden ausgehen zu lassen.[1]) Im allgemeinen geht die Strahlung keineswegs von den Enden der Leitung, sondern von allen Stromelementen der Leitung aus. Auch ein geschlossener Kreis entsendet daher im allgemeinen, wenn er von schnell wechselndem Strome durchflossen ist, elektromagnetische Wellen. Nur dann, wenn seine Abmessungen klein gegen die Wellenlänge sind, wird die Vektorsumme aller Stromelemente gleich Null; aus diesem Grunde, und weil dieselbe Schwingungsphase für alle Stromelemente in Betracht kommt, verschwindet das Feld in entfernten Aufpunkten, und somit die Strahlung des geschlossenen Kreises.

---

1) H. M. Macdonald stellt in seiner Preisschrift „Electric waves", Cambridge 1902, die irrige Behauptung auf, daß die Strahlung einer jeden geschlossenen Leitung verschwinde und die Strahlung einer ungeschlossenen Leitung stets von den Enden ausgehe. Die auf dieser Behauptung basierten Entwickelungen der genannten Schrift sind fehlerhaft.

§ 34. Die Strahlung von Sendedrähten.

Wir denken uns einen geradlinigen Draht, von der Länge $2h$, frei im Raume befindlich. Es mögen, etwa durch den elektrischen Funken, die elektrischen Eigenschwingungen dieses Drahtes erregt sein. Wir nehmen an, daß für die Fortpflanzung von Drahtwellen längs eines Einzeldrahtes, wenigstens angenähert, dieselben Gesetze gelten, die wir für zwei Paralleldrähte bewiesen haben (I, § 73 u. 75), d. h. daß die Geschwindigkeit der Fortpflanzung längs der Leitung der Geschwindigkeit c gleich ist, mit welcher die Wellen sich im Raume ausbreiten, und daß am freien Ende eine einfache Reflexion der Stromwelle stattfindet. Treffen diese Voraussetzungen zu, so werden sich stehende Wellen längs des Drahtes ausbilden, die an den freien Enden Stromknoten besitzen, während die etwa sonst noch vorhandenen Stromknoten in Abständen von je einer halben Wellenlänge aufeinander folgen. Dem entspricht der Ansatz

$$J = a \cdot \sin(\nu t) \cdot \cos\left(\frac{\nu \zeta}{c}\right), \tag{183}$$

falls n eine ungerade ganze Zahl und

$$\frac{\nu h}{c} = n \frac{\pi}{2} \tag{183a}$$

ist. Die hierdurch dargestellten ungeradlinigen Eigenschwingungen besitzen in der Mitte des Drahtes, bei $\zeta = 0$, ein Maximum des Stromes; die Konstante a gibt die Stromamplitude daselbst an. Stromknoten liegen bei

$$\zeta = \pm \frac{m}{n} \cdot h, \quad \text{wo } m \leqq n \tag{183b}$$

eine ungerade ganze Zahl ist. Die durch $n = 1$ gegebene Grundschwingung hat nur zwei Stromknoten, und zwar an den Drahtenden; ihre Wellenlänge ist

$$\lambda_1 = \frac{2\pi c}{\nu_1} = 4h, \tag{183c}$$

d. h. sie ist gleich der doppelten Drahtlänge, während für die Oberschwingungen die Drahtlänge $2h$ ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist, wie die Gleichung

$$\lambda_n = \frac{2\pi c}{\nu_n} = \frac{4h}{n} \tag{183d}$$

besagt. Die durch (183b) bestimmten $n+1$ Stromknoten teilen den Draht in n Strecken, deren jede einer halben Wellenlänge gleich ist. Von den geradzahligen Eigenschwingungen, welche in der Mitte einen Stromknoten besitzen, sehen wir hier ab.

Inwiefern die theoretischen Voraussetzungen des Ansatzes (183) zutreffen, mag zunächst unerörtert bleiben. Wir denken uns diese Stromverteilung experimentell festgestellt. Die Grundformel (181a) bestimmt dann den Hertzschen Vektor und somit die Fernwirkung des Drahtes. Aus der durch (181) bestimmten Größe

$$q = \frac{a}{\nu} \cos\left(\frac{\nu\zeta}{c}\right)\left(1 - \cos(\nu t)\right)$$

folgt nach (181a) als z-Komponente des Hertzschen Vektors

$$\mathfrak{Z}_z = \frac{a}{\nu}\int\limits_{-h}^{+h} \frac{d\zeta}{r} \cos\left(\frac{\nu\zeta}{c}\right)\cdot\left(1 - \cos\frac{\nu}{c}(l-r)\right). \tag{184}$$

Die beiden anderen Komponenten von $\mathfrak{Z}$ verschwinden. Auf Grund von (181c, d) bestimmt sich hieraus das elektromagnetische Feld in Entfernungen, die groß gegen die Abmessungen des Drahtquerschnittes sind. Der von $l = ct$ unabhängige Teil des Ausdruckes (184) rührt von der anfänglichen Ladungsverteilung her und ergibt deren elektrostatisches Feld $\mathfrak{E}_0$. Uns interessiert nur das periodisch wechselnde Feld der Schwingung; wir setzen daher für die Hertzsche Funktion

$$\mathfrak{Z}_z = -\frac{a}{\nu}\int\limits_{-h}^{+h} \frac{d\zeta}{r} \cos\left(\frac{\nu\zeta}{c}\right) \cos\left(\frac{\nu l - \nu r}{c}\right), \tag{184a}$$

und erhalten aus (181c, d) die Komponenten der Feldstärken:

$$\mathfrak{H}_x = \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial y\, \partial l}, \qquad \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial x\, \partial l}. \tag{184b}$$

(184c)
$$\begin{cases} \mathfrak{E}_x = \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial x \partial z}, \quad \mathfrak{E}_y = \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial y \partial z}, \\ \mathfrak{E}_z = \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 \mathfrak{Z}_z}{\partial l^2}. \end{cases}$$

Wir wollen diese Ausdrücke zur Ermittelung der vom Drahte ausgesandten elektromagnetischen Wellen verwerten. Wir wählen einen Aufpunkt, dessen Entfernung r_0 vom Mittelpunkt des Drahtes groß sowohl gegen die Wellenlänge, als auch gegen die Drahtlänge ist. Im Nenner des Integranden in (184a) kann dann r durch r_0 ersetzt werden, hingegen im Argumente des im Zähler auftretenden Kosinus ist zu setzen

$$r = r_0 - \zeta \cos \vartheta_0,$$

oder

(185)
$$r = r_0 - \zeta u, \quad u = \cos \vartheta_0,$$

wobei ϑ_0 den Winkel anzeigt, welchen der vom Drahtmittelpunkte nach dem Aufpunkt hin gezogene Fahrstrahl $\mathfrak{r}_0$ mit der Drahtachse einschließt. Die Unterschiede der Latenswege der von verschiedenen Punkten des Sendedrahtes entsandten und gleichzeitig im Aufpunkte eintreffenden Wellen kommen hier wesentlich in Betracht.

Wir erhalten

(185a)
$$\mathfrak{Z}_z = -\frac{a}{r_0 \nu} \int_{-h}^{+h} d\zeta \cos\left(\frac{\nu\zeta}{c}\right) \cos\left\{\frac{\nu}{c}(l - r_0) + \frac{\nu u \zeta}{c}\right\}.$$

Nun ist offenbar

$$\int_{-h}^{+h} d\zeta \cos\left(\frac{\nu\zeta}{c}\right) \sin\left(\frac{\nu u \zeta}{c}\right) = 0,$$

infolge von (183a) ergibt ferner eine einfache Rechnung

$$\int_{-h}^{+h} d\zeta \cos\left(\frac{\nu\zeta}{c}\right) \cos\left(\frac{\nu u \zeta}{c}\right) = \frac{2c}{\nu} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2} \cdot u\right)}{1 - u^2}.$$

Demnach erhalten wir als **Wert der Hertzschen Funktion des Sendedrahtes in der Wellenzone:**

$$\text{(185b)} \quad \mathfrak{Z}_z = -a \cdot \frac{2c}{\nu^2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\nu l}{c} - \frac{\nu r_0}{c}\right)}{r_0} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2} \cdot u\right)}{1-u^2}.$$

Dieser Ausdruck entspricht der Hertzschen Funktion eines der z-Achse parallelen Dipoles (vgl. 53), doch ist für die verschiedenen, durch u bestimmten Richtungen ein verschiedenes Moment des Dipoles in Rechnung zu setzen. Das ist das Ergebnis der Superposition der von den Stromelementen des Drahtes herrührenden Wirkungen, welche in verschiedenen Phasen im Aufpunkte eintreffen.

Bei der Berechnung der Feldstärken aus (184b, c) braucht nur das Argument des von l und r_0 abhängigen Kosinus differenziert zu werden, da in großen Entfernungen die übrigen durch Differentiation nach den Koordinaten entstehenden Terme fortfallen. Man erhält eine Orientierung der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in der Wellenzone, welche ganz derjenigen des Dipoles entspricht. Konstruiert man auf der Kugelfläche, welche die Lage der Welle angibt, das System der Längen- und Breitenkreise, indem man die Schnittpunkte der verlängerten Drahtachse mit der Kugel als Pole wählt, so findet man den elektrischen Vektor überall den Meridianen, den magnetischen den Breitenkreisen parallel weisend. Die Beträge der beiden Vektoren sind

$$\text{(185c)} \qquad |\mathfrak{E}| = |\mathfrak{H}| = \frac{2a}{c} \cdot \frac{\cos\left(\nu t - \frac{\nu r_0}{c}\right)}{r_0} \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2} \cdot u\right)}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Über die Verteilung der Feldstärken längs der Meridiane ist folgendes auszusagen: **Ihren maximalen Betrag haben die Feldstärken am Äquator der Kugel** (wo, gemäß 185, $u = 0$, $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ ist). **Für die Grundschwingung** ($n = 1$) **nehmen sie allmählich nach den Polen hin ab, um dort zu verschwinden. Die Oberschwingungen hingegen haben die durch**

(185d) $u = \pm \frac{m}{n}$ ($m \leqq n$ eine ungerade ganze Zahl)

gegebenen Breitenkreise als Knotenlinien. Hier zerstören sich durch Interferenz die von den einzelnen Stromelementen des Sendedrahtes ausgehenden Wellen.

Es fällt auf, daß die Amplitude (185c) der von den Eigenschwingungen des Sendedrahtes erregten Wellen die Länge des Drahtes nicht enthält. Man könnte zunächst versucht sein, dieses Ergebnis für irrig zu halten, da ja die Amplitude der entsandten Wellen der Länge des stromführenden Drahtes proportional sein muß; dabei würde man aber übersehen, daß mit der Länge des Drahtes auch die Wellenlänge gesteigert wird. Da die Amplitude der entsandten Wellen nicht der Stromstärke selbst, sondern deren zeitlicher Änderung proportional ist, so kompensiert die Abnahme der Fernwirkung infolge der Verringerung der Frequenz die Zunahme infolge der Vergrößerung der wirksamen Drahtlänge. Von der Antennenlänge ist die Fernwirkung unabhängig. Es ist, wenn man möglichst intensive Wellen zu erregen wünscht, die maximale Stromamplitude a im Sendedrahte möglichst zu steigern. Für eine gegebene Antenne geht nun zwar die Stromamplitude der Spannungsamplitude parallel. Doch kann man, wenn die Spannungsamplitude vorgeschrieben ist, die Stromamplitude steigern, indem man Antennen von möglichst großer Kapazität pro Längeneinheit (d. h. möglichst dicke Drähte) wählt; auf demselben Prinzip beruht die Steigerung der Fernwirkung, die man in der drahtlosen Telegraphie durch Käfigantennen erzielt. Durch Vergrößerung der Antennenlänge aber werden die Wellenamplituden nicht vergrößert.

Wir schreiten zur Berechnung der pro Sekunde entsandten Gesamtstrahlung. Aus dem Poyntingschen Satze folgt

$$\mathfrak{S}_{r_0} = \frac{c}{4\pi} \cdot |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| = \frac{a^2}{\pi c r_0^2} \cos^2\left(\nu t - \frac{\nu r_0}{c}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{n\pi u}{2}\right) \cdot (1 - u^2)^{-1}.$$

Die Mittelwertsbildung über eine Reihe von Schwingungen und die Integration über die ganze Kugel vom Radius r_0 ergibt als Energieverlust durch Strahlung

$$-\frac{dW}{dt}=\frac{a^2}{c}\int_{-1}^{+1} du\cos^2\left(\frac{n\pi u}{2}\right)(1-u^2)^{-1}$$

$$=\frac{a^2}{4c}\int_{-1}^{+1} du\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)(1+\cos\pi n u)$$

$$=\frac{a^2}{2c}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{1+u}(1+\cos\pi n u).$$

Da n eine ungerade ganze Zahl ist, können wir schreiben

$$-\frac{dW}{dt}=\frac{a^2}{2c}\cdot C_n, \tag{186}$$

wo abkürzungsweise gesetzt ist

$$C_n=\int_{-1}^{+1}\frac{du}{1+u}\Big(1-\cos\pi n(1+u)\Big)=\int_0^{2\pi n}\frac{dx}{x}(1-\cos x). \tag{186a}$$

Es handelt sich noch um die Berechnung dieses transzendenten Integrales. Wir zerlegen dasselbe in vier Integrale:

$$C_n=\int_0^{2\pi n}\frac{dx}{1+x}-\int_{2\pi n}^{\infty}\frac{dx}{x(1+x)}+\int_0^{\infty}dx\left\{\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\cos x}{x}\right\}+\int_{2\pi n}^{\infty}\frac{dx\cos x}{x}$$

und berechnen jedes derselben. Die Summe der beiden ersten ist

$$\int_0^{2\pi n}\frac{dx}{1+x}-\int_{2\pi n}^{\infty}\frac{dx}{x(1+x)}=ln(2\pi n). \tag{186b}$$

Für das dritte Integral schreiben wir

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x}\left\{\frac{1}{1+x}-\cos x\right\}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{x}\left(e^{-x}-\cos x\right) \tag{186c}$$

$$-\int_0^{\infty}\frac{dx}{x}\left(e^{-x}-\frac{1}{1+x}\right).$$

Nun folgt aus

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x} - \cos x\right) = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \{e^{-x(1+y)} - \cos x e^{-xy}\}$$

durch Vertauschung der Integrationsfolge

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x} - \cos x\right) = \int_0^\infty dy \left(\frac{1}{1+y} - \frac{y}{1+y^2}\right),$$

wenn die bekannte Formel[1]) berücksichtigt wird.

$$\int_0^\infty dx e^{-xy} \cos x = \frac{y}{1+y^2}.$$

Es ergibt sich demnach

$$\text{(186d)} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x} - \cos x\right) = \frac{1}{2}\left\{ln \frac{(1+y)^2}{1+y^2}\right\}_{y=0}^{y=\infty} = 0.$$

Der zweite Bestandteil von (186c) aber läßt sich auf Grund einer von Dirichlet herrührenden Formel[2])

$$\text{(186e)} \quad -\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right) = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 0{,}577215\ldots$$

mit der Γ-Funktion und mit der sogenannten Eulerschen Konstanten in Verbindung bringen.

Der vierte Term im Ausdruck von C_n endlich läßt sich durch partielle Integration auf die Form einer halbkonvergenten Reihe bringen

$$\text{(186f)} \quad \int_{2\pi n}^\infty dx \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{(2\pi n)^2} - \frac{3!}{(2\pi n)^4} + \frac{5!}{(2\pi n)^6} - \cdots$$

---

1) Vgl. z. B. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen. I § 19. Gl. 2. S. 43.

2) G. L. Dirichlet, Journal f. reine u. angew. Mathem. 15, S. 260. 1836.

In dieser Reihe ist der Rest stets kleiner als das letzte beibehaltene Glied, sie ist demnach, wenn man möglichst genau zu rechnen wünscht, mit dem kleinsten Gliede abzubrechen.

Aus (186b, c, d, e, f) folgt jetzt

$$C_n = ln(2\pi n) + 0{,}577 + \frac{1}{(2\pi n)^2} - \frac{3!}{(2\pi n)^4} + \cdots \tag{187}$$

Durch (186) und (187) bestimmt sich die mittlere sekundliche Gesamtstrahlung der Eigenschwingungen des Drahtes. Dieselbe wächst bei gegebener maximaler Stromamplitude mit der Ordnungszahl der Schwingung; je größer die Ordnungszahl, desto rascher konvergiert die Reihe (187). Für die Grundschwingung findet man den numerischen Wert

$$\frac{a^2}{2c} \cdot C_1 = 1{,}22 \cdot \frac{a^2}{c} \tag{187a}$$

der mittleren sekundlichen Gesamtstrahlung. Die maximale Stromamplitude a ist dabei elektrostatisch zu messen.

Die hier gegebene Berechnung der Strahlung eines Wellenerregers beruht auf der Annahme, daß die aus der Theorie der stehenden Drahtwellen geläufigen Vorstellungen sich ohne weiteres auf den Erreger übertragen lassen. Es kann bezweifelt werden, ob diese Übertragung von vornherein berechtigt ist. In der Tat, die Frage nach dem zeitlichen Verlaufe der Eigenschwingungen eines Hertzschen Erregers war viele Jahre hindurch eine strittige. Während H. Hertz und V. Bjerknes die Vorstellung vertraten, daß der Erreger nur eine einzige hauptsächlich durch Strahlung gedämpfte Schwingung aussende, schlossen sich andere Forscher einer von Sarasin und de la Rive aufgestellten Hypothese an, indem sie die Strahlung des Hertzschen Erregers als ein kontinuierliches Spektrum ungedämpfter Schwingungen ansahen. In Anbetracht dieser Sachlage meinte ich, als ich die Behandlung des Problemes in Angriff nahm[1], auf die Analogie der Drahtwellen

---

1) M. Abraham, Die elektrischen Schwingungen um einen stabförmigen Leiter. Ann. d. Phys. (3) 66, S. 435. 1898.

nicht bauen zu dürfen. Ich zog es vor, auf die Maxwellschen Gleichungen zurückzugehen, und durch Integration derselben gleichzeitig das Feld und die Perioden und Dämpfungsdekremente der Eigenschwingungen zu ermitteln. Das gelang für einen stabförmigen Leiter, d. h. für ein sehr gestrecktes Rotationsellipsoid. Es ergab sich die theoretische Möglichkeit einer unendlichen Reihe gedämpfter Eigenschwingungen; ihre Wellenlängen fanden sich in erster Annäherung in Übereinstimmung mit der oben dargelegten elementaren Theorie (Gleichung 183d), während die durch Strahlung bedingten logarithmischen Dekremente der Amplituden durch die Formel dargestellt wurden

$$\sigma_n = \frac{C_n}{n \cdot ln\left(\frac{2h}{b}\right)}; \tag{187b}$$

dabei ist b der Radius des äquatorialen Leiterquerschnittes, C_n die durch (186a) definierte und in (187) ausgewertete Konstante; man bemerkt, daß mit wachsender Ordnungszahl die Amplitudenabnahme während einer Schwingung geringer wird.

Jede einzelne der Eigenschwingungen ist gekennzeichnet durch die Knotenflächen des magnetischen Feldes. Dieses sind konfokale Rotationshyperboloïde, deren Brennpunkte in den Enden des Leiters liegen; dieselben schneiden den Leiter in den Stromknoten (für ungerades n werden diese durch [183b] bestimmt), während ihre Asymptotenkegel die Richtungen angeben, in denen die Strahlung verschwindet (185d für ungerades n). Für alle geradzahligen Eigenschwingungen ist die Äquatorebene eine Knotenebene des magnetischen Feldes; für sie ist die Mitte des Leiters ein Stromknoten und Spannungsbauch; hingegen ist für die oben behandelten ungeradzahligen Eigenschwingungen der äquatoriale Querschnitt ein Strombauch und ein Spannungsknoten.

Die theoretischen Gesetze der Knotenflächen und Bauchflächen des magnetischen Feldes wurden durch die sorgfältigen experimentellen Untersuchungen von F. Kiebitz[1]) bestätigt (für $n = 3$).

1) F. Kiebitz, Ann. d. Phys. (4) 5, S. 872. 1901.

Derselbe stellte das Vorhandensein der ungeradzahligen Oberschwingungen bis $n = 17$ fest, es fehlten hingegen die geradzahligen Eigenschwingungen des Sendedrahtes; entsprechend der angewandten Erregungsweise (Funkenstrecke in der Mitte), bei welcher im Anfange die Spannung in zwei symmetrisch liegenden Punkten des Erregers entgegengesetzt gleich ist, bildeten sich nur diejenigen Eigenschwingungen aus, welche in der Mitte des Drahtes einen Spannungsknoten besitzen.

Wir müssen uns hier ein genaueres Eingehen auf die strenge Theorie des stabförmigen Senders versagen, und uns mit einem Hinweise auf die Originalarbeit und auf die von F. Hack[1]) gegebene zeichnerische Darstellung der elektrischen Kraftlinien der Eigenschwingungen und ihrer Bewegung begnügen. Die obige mehr elementare Abteilung der Strahlung eines Sendedrahtes habe ich später[2]) veröffentlicht, als diese Dinge für die drahtlose Telegraphie von aktueller Bedeutung wurden. Bei der ursprünglichen Marconischen Senderanordnung wird der eine Pol einer Funkenstrecke mit der Antenne, der andere mit der Erde verbunden. Man hat es also hier nicht mit einem frei im Raume schwingenden Draht zu tun, es ist vielmehr die Erde in Betracht zu ziehen. Das kann aber in sehr einfacher Weise geschehen, wenn man mit Rücksicht auf die Wahrnehmung, daß die Wellen nicht merklich in die Erde eindringen, die Erde als gut leitend betrachtet, oder optisch gesprochen, als spiegelnd. Die an der Oberfläche eines vollkommenen Leiters geltende Grenzbedingung, daß die elektrischen Kraftlinien senkrecht stehen, wird, wie die Theorie ergibt, von allen ungeradzahligen Eigenschwingungen des freien Sendedrahtes an der Äquatorebene erfüllt. Spiegelt man die von der Erde senkrecht bis zur Höhe h aufsteigende Sendeantenne an der ebenen Erdoberfläche und zieht die ungeradzahligen Eigenschwingungen des entstandenen geraden Drahtes von der Länge $2h$ in Betracht, so erhält man ein elektro-

1) F. Hack, Ann. d. Phys. (4) 14, S. 539. 1904.
2) M. Abraham, Physik. Zeitschrift 2, S. 329. 1901.

magnetisches Feld, welches an der Erdoberfläche der gestellten Grenzbedingung Genüge leistet; dasselbe ist oberhalb der Erdoberfläche mit demjenigen der wirklichen Sendeantenne identisch. Für die drahtlose Telegraphie kommt nun hauptsächlich die Grundschwingung in Betracht. Aus unserem Spiegelungsverfahren und aus Gleichung (183c) können wir schließen: Die Wellenlänge der Grundschwingung einer Sendeantenne ist gleich ihrer vierfachen Höhe. Die Höhe ist dabei von der Erde an zu rechnen, entsprechend dem Umstande, daß die Spannung des untersten, der Erdoberfläche zugehörigen Punktes der Leitung gleich Null ist. Das Dämpfungsdekrement der Grundschwingung ist nach (187a, b)

$$\sigma_1 = \frac{C_1}{ln\left(\frac{2h}{b}\right)} = \frac{2{,}44}{ln\left(\frac{2h}{b}\right)}. \tag{187c}$$

Diese Formel bezieht sich allerdings zunächst auf eine Antenne, deren Querschnitt nach der Spitze hin allmählich abnimmt. Immerhin wird man sie auch auf zylindrische Drähte anwenden können, wie es ja überhaupt auf den genauen Zahlwert des als Argument des Logarithmus auftretenden Quotienten kaum ankommt.

Man erhält z. B. für $b = 0{,}1$ cm, und

für $h =$ 25 Meter, $\lambda_1 =$ 100 Meter : $\sigma_1 = 0{,}23$,

für $h =$ 250 Meter, $\lambda_1 =$ 1000 Meter : $\sigma_1 = 0{,}19$.

Meist wird man, bei der Verwendung eines einzelnen Sendedrahtes, mit dem Werte $\sigma_1 = 0{,}2$ des Strahlungsdekrementes rechnen können. Ihm entspricht ein Herabsinken der Wellenamplituden auf den e^{ten} Teil nach fünf ganzen Schwingungen. Dieser immerhin beträchtliche Wert der Dämpfung stimmt mit der allgemeinen Erfahrung überein, wonach die Resonanzkurve (vgl. I, § 67) einer solchen einfachen Antenne eine ziemlich flache, der Bereich des Ansprechens mithin ein ziemlich weiter ist. Die Bedingungen für eine abgestimmte Telegraphie sind bei dieser einfachsten

Anordnung recht ungünstige. Übrigens kommt neben der Dämpfung durch Strahlung diejenige durch Joulesche Wärme in Frage; ihr Betrag ist allerdings verhältnismäßig gering; die Wärmeentwickelung in der metallischen Leitung ist gegen die Ausstrahlung ganz zu vernachlässigen; höchstens könnte die in der Funkenstrecke entwickelte Wärme in Rechnung zu ziehen sein.

Bei den neueren Braun-Slabyschen Senderanordnungen hat man es meistens mit zwei Leitungen zu tun. In der ersten nahezu geschlossenen Leitung befinden sich Kondensatoren, in denen die Energie aufgespeichert ist. Mit ihm induktiv verkoppelt, oder an ihn direkt angeschlossen ist die Sendeantenne, welche die Wellen in den Raum hinaus sendet. Die Literatur über diese Anordnungen ist eine sehr umfangreiche. Viele der Autoren jedoch begnügen sich entweder damit, den Strom in der Antenne als quasistationär zu behandeln, indem sie die in Bd. I, § 68 dargelegten, zunächst auf den Tesla-Transformator bezüglichen Entwickelungen ohne weiteres auf den vorliegenden Fall übertragen, andere wiederum beschränken sich darauf, die Verteilung von Strom und Spannung längs der Antenne zu bestimmen, ohne von den entsandten Wellen zu reden. Gerade auf die entsandten Wellen aber kommt es bei der drahtlosen Telegraphie an, und auch ihre Rückwirkung auf die Senderschwingungen darf nicht außer acht gelassen werden. Daß man unter Berücksichtigung dieser Umstände das direkt gekoppelte Gebersystem approximativ behandeln kann, habe ich kürzlich gezeigt.[1]) Es ergeben sich, auch wenn die beiden Leitungen vor der Koppelung in Resonanz waren, zwei verschiedene Grundschwingungen des gekoppelten Systemes; diese geben zu Schwebungen Anlaß (vgl. I, § 68), in deren Verlaufe die Energie vom Primärkreis der Antenne zugeführt und so zur Ausstrahlung gebracht wird.

Auch wenn man es mit mehreren parallelen Sendedrähten zu tun hat, kann man aus der Stromverteilung auf Grund der Entwickelungen der beiden letzten Paragraphen unschwer die

1) M. Abraham, Phys. Zeitschrift (5), S. 174. 1904.

entsandten Wellen ermitteln. Sind die Abstände der Drähte von der Ordnung der Wellenlänge, so werden sich Interferenzen der entsandten Wellen ergeben. Sind hingegen die Abstände der Drähte klein gegen die Wellenlänge, so werden sich die entsandten Wellen in allen Aufpunkten verstärken, wenn die Ströme in den Drähten alle in der gleichen Phase schwingen, z. B. bei den Käfigantennen der drahtlosen Telegraphie; sie werden sich durch Interferenz aufheben, wenn sie in entgegengesetzten Phasen schwingen. Ein Beispiel der letzteren Art haben wir in Bd. I, § 76 kennen gelernt: eine Leitung von endlicher Länge, die aus zwei parallelen, jeweils in gegenüberliegenden Querschnitten von entgegengesetzt gleichen Strömen durchflossenen Drähten besteht; man sieht jetzt ohne weiteres die Richtigkeit der dort aufgestellten Behauptung ein, daß ein solches System nicht strahlt. Man verwendet bei Laboratoriumsversuchen mit elektrischen Wellen gerade darum parallele Drähte zur Fortleitung, weil diese die Energie in ihrer unmittelbaren Umgebung halten, und sie nicht zur Ausstrahlung gelangen lassen.

Wir haben im ersten Bande dieses Werkes (§ 73) die Fortpflanzung elektrischer Wellen längs einer unendlichen Leitung unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen behandelt. Wir haben die Leiter als vollkommene angesehen und gefunden, daß in diesem Falle die Geschwindigkeit, mit welcher die Wellen längs der Leitung forteilen, der Geschwindigkeit der elektromagnetischen Störungen in dem betreffenden Isolator gleich ist. Wir haben betont, daß Wellen, die längs eines Einzeldrahtes sich fortpflanzen, nicht in den Gültigkeitsbereich der dort angewandten Methode fallen. Diese Lücke füllt die Arbeit von A. Sommerfeld[1]) in willkommener Weise aus; dieselbe behandelt die Fortpflanzung längs eines Einzeldrahtes vom Standpunkte der Maxwellschen Theorie aus; sie zeigt, daß bei Berücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit des Drahtes die erwähnten Schwierigkeiten fortfallen, ohne daß in prak-

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. (3) 67, S. 233. 1899.

tischen Fällen der Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen sich merklich änderte. An diese Untersuchung schließt sich diejenige von G. Mie[1]) an, welche Wellen behandelt, die an zwei parallelen Drähten von endlicher Leitfähigkeit fortschreiten. Wie Kapazität und Selbstinduktion der Leitung in diesen Fällen zu definieren sind, hat der Verfasser dieses Werkes dargelegt.[2]) Leider müssen wir uns hier mit einem kurzen Hinweis auf diese Probleme begnügen, der den Leser zum Studium der Originalabhandlungen anregen mag.

Zweites Kapitel.

Bewegte Körper.

§ 35. Die erste Hauptgleichung.

Wir haben im vorigen Kapitel (§ 28) die Hauptgleichungen der Elektrodynamik ruhender Körper aus der Elektronentheorie abgeleitet; wir sind dabei ausgegangen von den Gleichungen (Ia bis IVa), welche sich durch Mittelwertsbildung über die Felder der einzelnen Elektronen ergeben hatten. Die auftretenden Mittelwerte $\bar{\mathfrak{h}}$, $\bar{\mathfrak{e}}$ haben wir mit der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ und der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ identifiziert (Gl. 166, 166a) und die Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ durch (166b, c) definiert. Für ruhende Körper ergaben sich die Gleichungen (Ib bis IVb) der Maxwellschen Theorie. Dabei ist der ersten Hauptgleichung (Ib) die dritte (IIIb) zuzuordnen, die aufs engste mit ihr verknüpft ist; bildet man nämlich die Divergenz von Ib, und differenziert IIIb nach der Zeit, so gelangt man zur Kontinuitätsbedingung der wahren (an den Leitungselektronen haftenden) Elektrizität. Anderseits ist die zweite Hauptgleichung (IIb) mit der vierten (IVb) verknüpft; IVb spricht das Verschwinden der Dichte des wahren Magnetismus aus, deren zeitliche Änderung nach IIb ohnedies verschwinden muß.

---

1) G. Mie, Ann. d. Phys. (4) 2, S. 201. 1900.

2) M. Abraham, Ann. d. Phys. (4) 6, S. 217. 1901.

Wir wollen nun für den allgemeinen Fall eines bewegten Körpers in diesem Paragraphen die erste Hauptgleichung und im nächsten Paragraphen die zweite aus den Grundhypothesen der Elektronentheorie ableiten. Dabei bilden wiederum die Differentialgleichungen (Ia bis IVa) den Ausgangspunkt. Unter $\mathfrak{v}$ ist aber jetzt nicht die Geschwindigkeit der Elektronen relativ zur Materie zu verstehen, sondern die absolute Geschwindigkeit der Elektronen im Raume, d. h. die Geschwindigkeit in dem universellen Bezugssystem (§ 4), in welchem die Isotropie der Lichtfortpflanzung statthat. Ob und wie dieses Bezugssystem empirisch festzulegen ist, mag hier nicht erörtert werden. Seine Existenz wird schon durch die Maxwellschen Gleichungen gefordert, welche in dem von Materie und Elektrizität leeren Raume (im Äther) gelten. Nach den Grundvorstellungen der Lorentzschen Theorie sind es Zustände des Raumes, welche durch die elektromagnetischen Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ beschrieben werden. In der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper dagegen sind es stets die elektromagnetischen Zustände der Materie, welche durch die elektromagnetischen Vektoren gekennzeichnet werden. Hierin liegt der prinzipielle Gegensatz der Hertzschen und der Lorentzschen Theorie; wie wir bereits im ersten Bande dieses Werkes andeuteten, befindet sich gerade in der Elektrodynamik bewegter Körper die Lorentzsche Theorie in besserer Übereinstimmung mit der Erfahrung, als die Hertzsche. Im folgenden wird das ausführlicher zu zeigen sein.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit der Materie, mit $\mathfrak{v}'$ die Relativgeschwindigkeit der Elektronen gegen die Materie. Es wird dann die absolute Geschwindigkeit der Elektronen

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{w} + \mathfrak{v}'.$$

Diese ist es, welche in der ersten Hauptgleichung auftritt. Die Form (Ia) der ersten Hauptgleichung enthält Größen, die durch Mittelwertsbildung über einen physikalisch unendlich kleinen Bereich entstanden sind. Die Moleküle, welche in diesem Bereiche enthalten sind, können ganz verschiedene Ge-

schwindigkeiten besitzen; unter $\mathfrak{w}$ jedoch ist die sichtbare Geschwindigkeit der Materie, d. h. der Mittelwert der Molekulargeschwindigkeiten für einen physikalisch unendlich kleinen Bereich, zu verstehen. Es wird demnach der Mittelwert des Konvektionsstromes der Elektronen

$$\overline{\varrho \mathfrak{v}} = \bar{\varrho}\, \mathfrak{w} + \overline{\varrho \mathfrak{v}'}. \tag{188}$$

Der erste Bestandteil enthält den Mittelwert der Dichte der Elektrizität, der nach (165) nichts anderes ist, als die Dichte ϱ' der freien Elektrizität. Es ist also

$$\bar{\varrho}\, \mathfrak{w} = \varrho' \mathfrak{w} \tag{188a}$$

der Konvektionsstrom der freien Elektrizität.

Falls die Elektronen relativ zur Materie ruhen, kommt nur dieser erste Bestandteil des gesamten Stromes (188) in Betracht. Bewegen sie sich dagegen relativ zur Materie, so ist der zweite Bestandteil in Rechnung zu ziehen. Das kann nun in ähnlicher Weise für bewegte Körper geschehen, wie es in § 28 für ruhende Körper geschah. Man hat wiederum die Anteile zu sondern, welche von den Leitungselektronen, Polarisationselektronen und Magnetisierungselektronen herrühren.

Die relative Bewegung der Leitungselektronen gegen den Körper macht sich als ein Leitungsstrom bemerkbar, dessen Dichte ist

$$\{\overline{\varrho \mathfrak{v}'}\}_l = \mathfrak{i}. \tag{188b}$$

Bei der Herstellung des durch $\mathfrak{P}$ gekennzeichneten elektrischen Momentes der Volumeinheit ist durch ein Flächenelement df die Elektrizitätsmenge $\mathfrak{P}_\nu df$ in dem durch die Normale ν angegebenen Sinne hindurchgetreten; das wurde in § 28 nachgewiesen und gilt für einen bewegten Körper genau so, wie für einen ruhenden. Es soll nun der Strom bestimmt werden, der von den Polarisationselektronen durch eine ungeschlossene Fläche f des Körpers transportiert wird. War zur Zeit t die mit den Polarisationselektronen durch f geschobene Elektrizität gleich

$$\int \mathfrak{P}_\nu df,$$

so ist sie zur Zeit $t + dt$ gleich

$$\int \mathfrak{P}_\nu df + dt \cdot \frac{d}{dt}\int \mathfrak{P}_\nu df.$$

Es ist also der Polarisationsstrom durch die Fläche f des Körpers

$$\int df \{\overline{\varrho \mathfrak{v}'}\}_p = \frac{d}{dt}\int \mathfrak{P}_\nu df = \int df \frac{\partial' \mathfrak{P}}{\partial t},$$

wo nach der Formel I, 122 (S. 121) gilt

$$\text{(188c)} \qquad \frac{\partial' \mathfrak{P}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{P}\mathfrak{w}] + \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{P}.$$

Der Polarisationsstrom durch die Flächeneinheit des bewegten Körpers ist folglich gegeben durch den Vektor

$$\text{(188d)} \qquad \{\overline{\varrho \mathfrak{v}'}\}_p = \frac{\partial' \mathfrak{P}}{\partial t}.$$

Hierdurch bestimmt sich auch der zweite, von der relativen Bewegung $\mathfrak{v}'$ der Polarisationselektronen gegen den Körper herrührende Anteil des Stromes (188), welcher durch eine im Raume feste Fläche fließt; der erste, von der Bewegung $\mathfrak{w}$ der Polarisationselektronen mit der Materie herrührende Stromanteil dagegen ist bereits in (188a) berücksichtigt worden, indem ja, gemäß (165), zur Dichte ϱ' der freien Elektrizität auch die Polarisationselektronen einen Beitrag liefern.

Für die Magnetisierung des bewegten Körpers ist selbstverständlich die relative Bewegung der umlaufenden Magnetisierungselektronen gegen den Körper maßgebend, so daß an Stelle von (164c) jetzt

$$\text{(188e)} \qquad \{\overline{\varrho \mathfrak{v}'}\}_m = c \operatorname{curl} \mathfrak{M}$$

den von der Magnetisierung herrührenden Stromanteil bestimmt.

Aus (188b, d, e) folgt

$$(188\text{f}) \qquad \overline{\varrho \mathfrak{v}'} = \mathfrak{i} + \frac{\partial' \mathfrak{P}}{\partial t} + c \operatorname{curl} \mathfrak{M}$$

für den gesamten von der relativen Bewegung der Elektronen gegen die Materie herrührenden Strom. Aus (188) und (188a, f) erhält man schließlich als *gesamten Mittelwert des Konvektionsstromes der Elektronen*:

$$(188\text{g}) \qquad \overline{\varrho \mathfrak{v}} = \varrho' \mathfrak{w} + \mathfrak{i} + \frac{\partial' \mathfrak{P}}{\partial t} + c \operatorname{curl} \mathfrak{M}.$$

Dieser Ausdruck, der als Erweiterung des auf ruhende Körper bezüglichen Ausdruckes (165b) sich ergibt, ist nun in die erste Hauptgleichung (Ia) einzuführen. An Stelle von $\bar{\mathfrak{e}}$, $\bar{\mathfrak{h}}$ ist, wie in § 28 (Gleichungen 166, 166a) $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{B}$ zu setzen; auch sind die Definitionen (166b, c) von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ zu berücksichtigen. Dann folgt als *erste Hauptgleichung für bewegte Körper*

$$(189) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \varrho' \mathfrak{w} + \frac{\partial' \mathfrak{P}}{\partial t}\right\}.$$

Zum Wirbel des Vektors $\mathfrak{H}$ liefern hiernach Beiträge: *Der Verschiebungsstrom im Äther, der Leitungsstrom, der Konvektionsstrom der freien Elektrizität und der Polarisationsstrom im bewegten Körper.*

Man kann an Stelle der Dichte ϱ' der freien Elektrizität auch durch (165) die Dichte ϱ der wahren Elektrizität einführen. Auf Grund von (166b) und (188c) wird dann

$$(189\text{a}) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{w} + \operatorname{curl} [\mathfrak{P}\mathfrak{w}]\right\}.$$

Diese Form der ersten Hauptgleichung wollen wir der ersten Hauptgleichung der Theorie von H. Hertz (I, Gleichung 252, S. 425) gegenüberstellen:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{w} + \operatorname{curl} [\mathfrak{D}\mathfrak{w}]\right\}.$$

Wie nach der Hertzschen Theorie, so werden auch nach der Lorentzschen durch den Leitungsstrom, den Verschiebungsstrom und den Konvektionsstrom der wahren Elektrizität

magnetische Wirkungen erregt; nur hinsichtlich des vierten Termes der rechten Seite der ersten Hauptgleichung, welcher (vgl. I, § 90) den sogenannten „Röntgenstrom“ bestimmt, weicht die Lorentzsche Theorie von der Hertzschen ab. Nach der Lorentzschen Theorie bestimmt

$$\text{curl}\,[\mathfrak{P}\,\mathfrak{w}]$$

die Dichte des Röntgenstromes. Gerade diese Forderung war es, welche durch die Versuche von A. Eichenwald ihre experimentelle Bestätigung gefunden hat.

Die Diskussion dieser Experimente ist am besten an die Form (189) der ersten Hauptgleichung anzuknüpfen. Es waren (I, S. 427) die geladenen Kondensatorplatten zusammen mit dem zwischen ihnen befindlichen Dielektrikum in gleichförmiger Rotation begriffen. Hier ist der Zustand ein stationärer auch dann, wenn man ein mitrotierendes Bezugssystem zugrunde legt; die von einem solchen Bezugssystem aus beurteilte zeitliche Änderung $\frac{\partial' \mathfrak{P}}{\partial t}$ ist folglich Null.

Da ein Leitungsstrom nicht fließt und da $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ gleichfalls Null ist, so folgt aus (189)

$$\text{curl}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,\varrho'\,\mathfrak{w}.$$

Für das bei Eichenwalds Versuchen erregte magnetische Feld ist also nach der Elektronentheorie die Bewegung der freien Elektrizität maßgebend. Dieses war eben die Feststellung Eichenwalds. Nach der Hertzschen Theorie dagegen wäre der allgemeine Ausdruck der ersten Hauptgleichung

$$\text{curl}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \frac{\partial' \mathfrak{D}}{\partial t}\right\};$$

da nun in dem vorliegenden Falle die von dem bewegten Körper aus beurteilte zeitliche Änderung von $\mathfrak{D}$ ebenso wie $\mathfrak{i}$ verschwindet, so würde sich nach H. Hertz überhaupt keine magnetische Wirkung ergeben. Die Versuche von Eichenwald zeigen demnach, daß nicht die Hertzsche, wohl

aber die Lorentzsche Elektrodynamik bewegter Körper die erste Hauptgleichung für die hier in Frage kommenden langsamen Bewegungen richtig formuliert.

Wir erhalten eine dritte, mit (189) und (189a) gleichwertige Form der ersten Hauptgleichung, wenn wir den neuen Vektor einführen:

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}]. \tag{189b}$$

Setzen wir dann noch

$$\frac{\partial' \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \text{curl}\,[\mathfrak{D}\mathfrak{w}] + \mathfrak{w}\,\text{div}\,\mathfrak{D},$$

und berücksichtigen, daß nach (166b) gilt

$$\text{curl}\,[\mathfrak{D}\mathfrak{w}] = -\,\text{curl}\,[\mathfrak{w}\mathfrak{E}] + 4\pi\,\text{curl}\,[\mathfrak{P}\mathfrak{w}],$$

und daß man allgemein hat

$$\text{div}\,\mathfrak{D} = \varrho,$$

so können wir (189a) schreiben

$$\text{curl}\,\mathfrak{H}' = \frac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \frac{\partial' \mathfrak{D}}{\partial t}\right\}. \tag{190}$$

Der Unterschied der Lorentzschen Theorie von der Hertzschen gibt sich hier dadurch kund, daß der „wahre“, aus Leitungsstrom und Verschiebungsstrom im bewegten Körper zusammengesetzte Strom bei Hertz curl $\mathfrak{H}$, bei Lorentz dagegen curl $\mathfrak{H}'$ bestimmt.

Was die aus der ersten Hauptgleichung fließende Grenzbedingung an der Trennungsfläche zweier bewegter Körper anbelangt, so ergibt sich diese in sehr einfacher Weise. Schreibt man den Körpern eine endliche Leitfähigkeit und eine endliche Polarisationsfähigkeit zu, so muß nach (190) an der Trennungsfläche der Flächenwirbel von $\mathfrak{H}'$ verschwinden, d. h. die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{H}'$ durchsetzen stetig die Trennungsfläche. Für den idealen Grenzfall des vollkommenen Leiters (I, § 72) hingegen, wo ein endlicher Flächenstrom $\mathfrak{j}$ als zulässig betrachtet wird, ist dieser Flächenstrom mit dem

Flächenwirbel von $\mathfrak{H}'$ verknüpft. Da nun ins Innere des vollkommenen Leiters das elektromagnetische Feld nicht eindringt, so bestimmt sich die Dichte des Flächenstromes durch den an der Oberfläche herrschenden Wert von $\mathfrak{H}'$ folgendermaßen

$$\frac{4\pi}{c}\mathfrak{j} = [\mathfrak{H}'\mathfrak{n}]. \tag{190a}$$

Dabei ist $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor, welcher die nach dem Inneren des Leiters weisende Normalenrichtung anzeigt.

Zu der ersten Hauptgleichung steht die dritte

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho \tag{191}$$

in enger Beziehung. Schließt man eine endliche Flächendichte aus, so muß die Flächendivergenz von $\mathfrak{D}$ verschwinden, d. h. die Normalkomponente von $\mathfrak{D}$ muß stetig die betreffende Trennungsfläche durchsetzen. Läßt man hingegen eine endliche Flächendichte ω zu, nämlich bei Körpern, welche das Feld nicht in ihr Inneres eindringen lassen, so wird

$$\omega = -(\mathfrak{D}\mathfrak{n}). \tag{191a}$$

Es ist ω durch die an der Oberfläche herrschende Normalkomponente von $\mathfrak{D}$ bestimmt. An der Oberfläche g e l a d e n e r b e w e g t e r Leiter kommt die Gleichung (191a) und an der Oberfläche b e w e g t e r i d e a l e r S p i e g e l außerdem die Gleichung (190a) in Betracht. D i e t a n g e n t i e l l e n K o m p o n e n t e n v o n $\mathfrak{H}'$ s i n d h i e r m i t d e r F l ä c h e n d i c h t e d e s L e i t u n g s s t r o m e s, d i e N o r m a l k o m p o n e n t e v o n $\mathfrak{D}$ i s t m i t d e r F l ä c h e n d i c h t e d e r w a h r e n E l e k t r i z i t ä t v e r k n ü p f t.

§ 36. **Die zweite Hauptgleichung.**

Die zweite Hauptgleichung der Elektronentheorie (IIa) enthält überhaupt kein von der Bewegung der Materie oder der Elektrizität direkt abhängiges Glied. Es gilt demnach im Falle der Bewegung ebenso wie im Falle der Ruhe die Gleichung IIb

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{192}$$

Diese Form der zweiten Hauptgleichung ist nichts anderes als das Induktionsgesetz, ausgesprochen für ein im Raume festes Flächenelement; denn es stellt $\mathfrak{E}$ die Kraft auf einen ruhenden, mit der Einheit der Ladung versehenen Probekörper dar, während die auf der rechten Seite von (192) auftretende zeitliche Änderung von $\mathfrak{B}$ auf einen festen Raumpunkt sich bezieht.

Es entsteht nun aber die Frage, ob auch für bewegte Körper das Faradaysche Induktionsgesetz (vgl. I, S. 390), welches ja von der Erfahrung durchweg bestätigt wird, aus den Grundvorstellungen der Elektronentheorie sich ableiten läßt. Um dies zu zeigen, müssen wir auf die Grundgleichung (V) des § 4 zurückgehen, welche die elektromagnetische Kraft $\mathfrak{F}$ bestimmt; es ist in der jetzt angewandten Bezeichnungsweise die auf die Einheit der Ladung wirkende Kraft

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{e} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{h}].$$

Wir betrachten eine Gruppe von Elektronen, welche sich mit der gemeinsamen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegen. Die Mittelwertsbildung über ein physikalisch unendlich kleines Gebiet ergibt dann für diese Elektronengruppe die elektromagnetische Kraft

$$\mathfrak{F} = \bar{\mathfrak{e}} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\bar{\mathfrak{h}}] = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]. \tag{193}$$

Wir setzen wieder wie im vorigen Paragraphen

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{w} + \mathfrak{v}',$$

indem wir unter $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit der Materie, unter $\mathfrak{v}'$ die Geschwindigkeit der Elektronen relativ zur Materie verstehen. Dann wird

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}' + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}'\mathfrak{B}], \tag{193a}$$

wo

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{B}] \tag{193b}$$

die Kraft auf eine relativ zur Materie ruhende Einheitsladung ist.

Der zweite Term in (193a) ergibt als Kraft auf die in der Volumeinheit enthaltenen Elektronen der betreffenden Gruppe:

$$\frac{1}{c}\left[\overline{\varrho \mathfrak{v}'}, \mathfrak{B}\right].$$

Hierdurch bestimmt sich, falls nur Leitungselektronen in Betracht kommen, auf Grund von (188f) die am Leiter angreifende ponderomotorische Kraft des magnetischen Feldes in Übereinstimmung mit I, Gleichung 245c, S. 411. Auch kann man, durch Unterscheidung verschiedener Arten von Elektronen, die in starken magnetischen Feldern auftretende, zur Stromrichtung senkrechte elektromotorische Kraft des Hall-Effektes (I, S. 242) ableiten. Das geschieht in den von E. Riecke und P. Drude entwickelten Elektronentheorien der Metalle (vgl. II, § 32). Für magnetisierte Körper tritt im Ausdrucke der ponderomotorischen Kraft curl $\mathfrak{M}$ an Stelle von $\frac{\mathfrak{i}}{c}$, wodurch sich die Äquivalenz von Magneten und elektrischen Strömen kundgibt, die in I, § 81 unter besonderer Berücksichtigung der ponderomotorischen Kräfte abgeleitet wurde. Für einen ruhenden Körper von wechselnder elektrischer Polarisation endlich ergibt (188f) die ponderomotorische Kraft pro Volumeinheit

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \mathfrak{B}\right].$$

Der Vergleich mit der entsprechenden ponderomotorischen Kraft der Hertzschen Theorie (I, Gleichung 250a, S. 421) zeigt, daß bei Hertz der gesamte Verschiebungsstrom, bei Lorentz nur der an der Materie haftende Bestandteil desselben von einer ponderomotorischen Kraft angegriffen wird. Das hängt damit zusammen, daß nach Lorentz elektromagnetische Kräfte überhaupt nur an den Elektronen und nicht an den von Elektronen leeren Gebieten des Raumes angreifen (vgl. II, § 5).

Uns interessiert hier vorzugsweise der erste Bestandteil des Vektors $\mathfrak{F}$, den wir mit $\mathfrak{E}'$ bezeichneten; die Gleichung (193b), die ihn bestimmt, berücksichtigt die Bewegung der Materie und formuliert das Gesetz der durch Bewegung

induzierten elektromotorischen Kraft. In der Tat, nach den Vorstellungen der Elektronentheorie ist $\mathfrak{E}'$ die Kraft, welche an der Einheit der mit dem Körper bewegten Elektrizität angreift, und durch diesen Vektor bestimmt sich der Bewegungsantrieb auf die Elektronen, wie er sich für ruhende Körper durch $\mathfrak{E}$ bestimmt. An Stelle der für ruhende isotrope Leiter geltenden Beziehung $\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$ wird demnach für bewegte Leiter

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}' \tag{193c}$$

zu setzen sein; es ist eine plausible Annahme, daß die Leitfähigkeit σ, wenigstens was Größen erster Ordnung (in dem Quotienten $\frac{|\mathfrak{w}|}{c}$) anbelangt, durch die Bewegung des Leiters nicht geändert wird.

Aus (192) und (193b) folgt

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{w}]\right\} = -\frac{1}{c}\frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{194}$$

Die rechte Seite bestimmt die zeitliche Änderung des Induktionsflusses durch eine bewegte Fläche; aus der allgemeinen Vektorformel (I, Gleichung 122, S. 121) folgt nämlich mit Rücksicht auf die Grundgleichung (IVb), welche das Verschwinden des wahren Magnetismus fordert:

$$\frac{d}{dt}\int df \mathfrak{B}_\nu = \int df \left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \operatorname{curl}\,[\mathfrak{B}\mathfrak{w}]\right\} = \int df \frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Dem Differentialgesetze (194) entspricht demnach das Integralgesetz der induzierten elektromotorischen Kraft

$$\int \mathfrak{E}' d\mathfrak{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int df \mathfrak{B}_\nu. \tag{194a}$$

Das Linienintegral der im bewegten Leiter wirksamen elektrischen Kraft $\mathfrak{E}'$ ist gleich der durch c geteilten zeitlichen Abnahme des umschlungenen Induktionsflusses.

Die Hertzsche Theorie drückt die zweite Hauptgleichung etwas anders aus. Sie setzt (I, § 86) bei fehlenden eingeprägten Kräften:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t},$$

oder

$$\int \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int df \mathfrak{B}_\nu .$$

In der Hertzschen Theorie stellt indessen der Vektor $\mathfrak{E}$ nicht den elektrischen Zustand des Raumes, sondern denjenigen der Materie dar; es wird, auch für einen bewegten Leiter, der Leitungsstrom dem Vektor $\mathfrak{E}$ proportional gesetzt, also

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$$

geschrieben. Wie wir sehen, weicht die zweite Hauptgleichung der Lorentzschen Theorie von derjenigen der Hertzschen in ähnlicher Weise ab, wie die erste. Wie dort $\mathfrak{H}'$ an Stelle von $\mathfrak{H}$, so tritt hier $\mathfrak{E}'$ an die Stelle von $\mathfrak{E}$. Während aber bei Hertz $\mathfrak{E}$ den Leitungsstrom im bewegten Körper bestimmt, bestimmt bei Lorentz $\mathfrak{E}'$ den Leitungsstrom. Hinsichtlich der in bewegten Leitern induzierten Ströme stimmt also die Lorentzsche Theorie mit der Hertzschen überein. Die im ersten Bande (§ 84 bis 87) dargelegten Gesetze der Induktion in Leitern, welche durch Messung der induzierten Ströme ihre experimentelle Prüfung und Bestätigung gefunden haben, ergeben sich auch aus den Grundhypothesen der Elektronentheorie.

Wie liegt nun die Sache, wenn nicht ein Leiter, sondern ein Isolator es ist, der sich im magnetischen Felde bewegt? Nach Hertz ist auch für den bewegten Isolator

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$$

zu setzen, wobei das Hertzsche $\mathfrak{E}$ mit dem Lorentzschen $\mathfrak{E}'$ identisch ist. Die Lorentzsche Theorie würde mit der Hertzschen hinsichtlich der erregten elektrischen Verschiebung übereinstimmen, wenn sie dieselbe proportional zu $\mathfrak{E}'$ setzen würde. Das tut sie indessen keineswegs. Sie unterscheidet vielmehr den vom Raume und den von der Materie beigesteuerten

Anteil der elektrischen Verschiebung, entsprechend der Gleichung

$$4\pi \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}.$$

Nur der an der Materie haftende Teil der elektrischen Verschiebung, d. h. die Verschiebung der Polarisationselektronen des Körpers wird durch den Vektor $\mathfrak{E}'$ bestimmt. An Stelle der für ruhende isotrope Körper geltenden Beziehung

$$4\pi \mathfrak{P} = (\varepsilon - 1) \mathfrak{E}$$

tritt für bewegte Isolatoren

$$4\pi \mathfrak{P} = (\varepsilon - 1) \mathfrak{E}',$$

so daß gemäß (193b) die gesamte elektrische Verschiebung in einem bewegten Dielektrikum gegeben wird durch

$$4\pi \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} + \frac{(\varepsilon - 1)}{c} [\mathfrak{w} \mathfrak{B}]. \tag{194b}$$

Die experimentelle Prüfung dieser von der Elektronentheorie geforderten Beziehung bildete den Gegenstand einer Arbeit von H. A. Wilson.[1] Dieser Forscher ließ einen dielektrischen hohlen Zylinder in einem der Achse parallelen magnetischen Felde rotieren. Die metallischen Belegungen der inneren und äußeren Begrenzungsflächen waren durch Gleitkontakte mit den Quadranten eines Elektrometers verbunden; die innere Belegung war gleichzeitig geerdet. Die infolge der Rotation sich herstellende radiale elektrische Verschiebung gibt zu einer wahren Ladung der Zylinderbelegungen Veranlassung; dieselbe bestimmt sich auf Grund von (194b) folgendermaßen: $\mathfrak{E}$, die Kraft auf die ruhende Einheit der Ladung, leitet sich aus dem elektrostatischen Potentiale der freien Elektrizität ab. An Stelle von $\mathfrak{B}$ kann, da man es bei den Versuchen mit Körpern zu tun hatte, deren magnetische Permeabilität nicht merklich von 1 verschieden war, $\mathfrak{H}$ gesetzt werden. Ferner ist $\mathfrak{w}$ senkrecht zu $\mathfrak{H}$ gerichtet; sein Betrag ist gleich $u \cdot r$, wo u die Winkelgeschwindigkeit, r der Abstand von der Achse ist.

---

1) H. A. Wilson. London Royal Soc. Trans. Vol. 204 A, S. 121, 1904.

Mithin ist

$$4\pi \mathfrak{D}_r = -\varepsilon \frac{d\varphi}{dr} \pm (\varepsilon - 1) \cdot \frac{ur}{c} \cdot |\mathfrak{H}|. \tag{194c}$$

Das zweite Glied wechselt bei Umkehrung des magnetischen Feldes das Vorzeichen. Ist h die Höhe des Zylinders und e die Ladung seiner inneren Belegung, a und b die Querschnittsradien der äußeren und inneren Belegung, so ist

$$4\pi \mathfrak{D}_r = \frac{2e}{hr}.$$

Da nun konzentrische Zylinder des Dielektrikums von derselben Verschiebung e durchsetzt werden, so ergibt die Integration von (194c) zwischen den Grenzen b und a:

$$e \cdot \frac{2}{\varepsilon h} \cdot ln\left(\frac{a}{b}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{u}{2c} \cdot |\mathfrak{H}| \cdot (a^2 - b^2)$$

oder

$$\frac{e}{K} = \varphi_1 - \varphi_2 \pm E^i, \tag{194d}$$

wo K die Kapazität des dielektrischen Zylinders ist und

$$E^i = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{u}{2c} |\mathfrak{H}| \, (a^2 - b^2). \tag{194e}$$

Die Ladung der Innenseite des äußeren Zylinders ist $-e$; folglich ist $+e$ die Ladung seiner Außenseite, des mit ihr verbundenen Quadranten des Elektrometers und des Leitungsdrahtes zusammen; der andere Quadrant ist zur Erde abgeleitet. Ist K' die Kapazität dieses ganzen Systems, so hat man

$$\frac{e}{K'} = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Hieraus und aus (194d) folgt

$$\pm E^i = (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \frac{K + K'}{K}, \tag{194f}$$

so daß aus der gemessenen Potentialdifferenz der Quadranten und den Konstanten des Apparates die Größe E^i sich ermitteln und so die experimentelle Prüfung der von der Elektronentheorie geforderten Beziehung (194e) sich durchführen läßt.

Die messenden Versuche H. A. Wilsons bestätigen nun durchaus die Gültigkeit dieser Beziehung; mit der Hertzschen Theorie hingegen sind sie nicht zu vereinbaren (diese setzt in (194b) ε an Stelle von $\varepsilon - 1$, mithin in (194e) 1 an Stelle von $1 - \frac{1}{\varepsilon}$). Wir können also aus den Versuchen von H. A. Wilson schließen, daß zwar die Lorentzsche, nicht aber die Hertzsche Elektrodynamik bewegter Körper die Beziehung zwischen den Feldstärken und der elektrischen Verschiebung für die hier in Frage kommenden langsamen Bewegungen richtig wiedergibt.

Ob eine der Gleichung (194b) entsprechende Beziehung die magnetische Induktion bewegter, magnetisch weicher Körper bestimmt, darüber scheint weder theoretisch noch experimentell etwas bekannt zu sein. Beschränken wir uns auf nicht magnetisierbare Körper, wo $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ identisch ist, so lauten die in den beiden letzten Paragraphen aus der Elektronentheorie abgeleiteten Grundgleichungen der Elektrodynamik:

$$\text{(Ic)}\quad \operatorname{curl} \mathfrak{H}' = \frac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \frac{\partial' \mathfrak{D}}{\partial t}\right\},$$

$$\text{(IIc)}\quad \operatorname{curl} \mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial' \mathfrak{H}}{\partial t},$$

$$\text{(IIIc)}\quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(IVc)}\quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0.$$

Dabei sind für beliebige Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ die Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ definiert durch

$$\text{(195)}\qquad \mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}],$$

$$\text{(195a)}\qquad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}].$$

Ferner sollen $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{D}$ sich folgendermaßen bestimmen:

$$\text{(195b)}\qquad \mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}',$$

$$\text{(195c)}\qquad 4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + (\varepsilon - 1)\,\mathfrak{E}' = \varepsilon\mathfrak{E}' - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}].$$

Dabei werden σ und ε als Materialkonstanten betrachtet, welche, soweit nur Größen erster Ordnung in $\frac{|\mathfrak{w}|}{c}$ in Frage kommen, von der Geschwindigkeit unabhängig sind. Auf solche „langsame Bewegungen" allein beziehen sich die Beobachtungen, von denen bisher die Rede war. Sie haben das soeben zusammengestellte System der Feldgleichungen durchaus bestätigt.

Die Hauptgleichungen (Ic) bis (IVc) und die Definitionen (195, 195a) sollen den Vorstellungen der Elektronentheorie gemäß für eine beliebige Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ der Materie zutreffen. Aus (IIc) und (IVc) ergibt sich als Grenzbedingung an der Trennungsfläche zweier bewegter Körper: Der Flächenwirbel von $\mathfrak{E}'$ und die Flächendivergenz von $\mathfrak{H}$ sind gleich Null; d. h. die tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}'$ und die Normalkomponente von $\mathfrak{H}$ durchsetzen stetig die Trennungsfläche der beiden Körper.

Diese Grenzbedingungen sind, ebenso wie die entsprechenden für ruhende Körper geltenden, auch dann noch aufrechtzuerhalten, wenn der eine der beiden Körper ein vollkommener Leiter ist. Denn auch an der Oberfläche eines solchen ist eine endliche Dichte des „magnetischen Stromes" und des Magnetismus nicht anzunehmen (vgl. I, S. 329, 330). Da nun in das Innere eines idealen Leiters das elektromagnetische Feld nicht eindringt, so gelten an seiner Oberfläche die Grenzbedingungen: Es verschwindet der Flächenwirbel von $\mathfrak{E}'$ und die Flächendivergenz von $\mathfrak{H}$:

$$[\mathfrak{E}'\mathfrak{n}] = 0, \tag{196}$$

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{n}) = 0. \tag{196a}$$

Das sind die an der Oberfläche eines bewegten vollkommenen Spiegels vorzuschreibenden Grenzbedingungen. Es bilden sich an dieser Oberfläche die durch (190a) und (191a) gegebenen Belegungen von elektrischem Leitungsstrome und von elektrischer Ladung. Sie sind es, welche das elektromagnetische Feld abschirmen.

§ 37. Der Versuch von Fizeau.

Über die Fortpflanzung des Lichtes in strömendem Wasser ist von Fizeau ein Versuch angestellt worden; von Michelson und Morley wiederholt, stellt dieser Versuch ein Experimentum crucis dar, welches für die Lorentzsche und gegen die Hertzsche Optik bewegter Körper entscheidet. Wir wollen nicht versäumen, die Theorie dieses Versuches von dem Standpunkte der Elektronentheorie aus darzulegen.

Bei den Versuchen gelangten zwei Lichtbündel zur Interferenz, welche zwei parallele Röhren durchsetzt hatten. Wurde das in den beiden Röhren enthaltene Wasser in entgegengesetzten Richtungen in Strömung versetzt, so erfolgte eine Verschiebung der Interferenzstreifen; aus dem Betrage der Verschiebung konnte die Veränderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes infolge der Bewegung des Wassers ermittelt und mit der Theorie verglichen werden.

Es handelt sich also hier um Lichtwellen, welche parallel der Geschwindigkeitsrichtung, oder in dem entgegengesetzten Sinne sich fortpflanzen. Wir legen die z-Achse in die Bewegungsrichtung des Wassers, setzen $\frac{|\mathfrak{w}|}{c} = \beta$ und betrachten zunächst einen geradlinig polarisierten Lichtstrahl, in dem die elektrischen Schwingungen der x-Achse, die magnetischen der y-Achse parallel erfolgen, dessen Strahlrichtung mithin in die z-Achse fällt. Man hat nach (195) und (195a)

$$\mathfrak{E}_x' = \mathfrak{E}_x - \beta \mathfrak{H}_y, \quad \mathfrak{H}_y' = \mathfrak{H}_y - \beta \mathfrak{E}_x. \tag{197}$$

Handelt es sich um ein dispersionsfreies Medium, dessen Brechungsindex sich aus der Maxwellschen Relation bestimmt, so kann die elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ auf Grund von (195c) berechnet werden. Zieht man aber die Dispersion des Wassers in Betracht, so hat man die Polarisation $\mathfrak{P}$ auf Grund der Ansätze des § 29 zu berechnen. Die Verschiebung der Polarisationselektronen bestimmt sich natürlich hier mit Rücksicht auf die Bewegung nicht durch $\mathfrak{E}$, sondern durch $\mathfrak{E}'$; dementsprechend gilt

$$4\pi\mathfrak{D} - \mathfrak{E} = 4\pi\mathfrak{P} = (n'^2 - 1)\,\mathfrak{E}'. \tag{197a}$$

Dabei ist n' der Brechungsindex in dem ruhenden Körper, genommen für die Schwingungszahl ν', in welcher die Elektronen des bewegten Mediums wirklich schwingen; aus der von einem ruhenden Beobachter wahrgenommenen Schwingungszahl ν bestimmt sich diese auf Grund des Dopplerschen Prinzipes, bei Vernachlässigung von Größen der Ordnung β^2, zu:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{\beta c}{w'}\right). \tag{197b}$$

Dabei ist w' die Geschwindigkeit der Wellen in dem bewegten Wasser, welche wir suchen.

Die beiden Hauptgleichungen (Ic) und (IIc) des vorigen Paragraphen ergeben

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial' \mathfrak{D}_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}'_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial' \mathfrak{H}_y}{\partial t}. \tag{198}$$

Die hier auftretenden Differentialquotienten nach der Zeit sind die von einem mitbewegten Punkte aus beurteilten. Die Fortpflanzung der Wellen, relativ zum bewegten Wasser, mag nun durch den komplexen Faktor zur Darstellung gebracht werden:

$$e^{i\nu'\left(t - \frac{z}{w'}\right)}.$$

Wird dann noch die mit Rücksicht auf die Dispersion verallgemeinerte Beziehung für die elektrische Verschiebung eingeführt, welche aus (197a) folgt:

$$4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + (n'^2 - 1)\,\mathfrak{E}', \tag{198a}$$

so erhalten wir aus (198) und (197)

$$\frac{1}{w'}\left\{\mathfrak{H}_y - \beta\mathfrak{E}_x\right\} = \frac{1}{c}\left\{\mathfrak{E}_x + (n'^2 - 1)(\mathfrak{E}_x - \beta\mathfrak{H}_y)\right\},$$

$$\frac{1}{w'}\left\{\mathfrak{E}_x - \beta\mathfrak{H}_y\right\} = \frac{1}{c}\mathfrak{H}_y,$$

oder

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_x\left\{\frac{w'n'^2}{c} + \beta\right\} = \mathfrak{H}_y\left\{1 + \beta\frac{w'}{c}(n'^2 - 1)\right\} \\ \mathfrak{H}_y\left\{\frac{w'}{c} + \beta\right\} = \mathfrak{E}_x. \end{cases} \tag{199}$$

Die Elimination von $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ ergibt für w' die quadratische Gleichung

(199a) $$\left(\frac{w'}{c}\right)^2 + \frac{2\beta}{n'^2}\left(\frac{w'}{c}\right) - \frac{1-\beta^2}{n'^2} = 0,$$

aus der sich die gesuchte Relativgeschwindigkeit der Lichtwellen gegen das strömende Wasser folgendermaßen bestimmt:

(199b) $$\frac{w'}{c} = -\frac{\beta}{n'^2} + \sqrt{\frac{1-\beta^2}{n'^2} + \frac{\beta^2}{n'^4}}.$$

Da es sich um Strömungsgeschwindigkeiten des Wassers handelt, die klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind, so kann man zweite und höhere Potenzen von β streichen. Alsdann wird

(200) $$\frac{w'}{c} = \frac{1}{n'} - \frac{\beta}{n'^2}$$

die Relativgeschwindigkeit der Lichtwellen gegen das strömende Wasser. Die Geschwindigkeit der Lichtwellen, welche ein ruhender Beobachter wahrnimmt, ist demnach w'', wo

(200a) $$\frac{w''}{c} = \frac{w'}{c} + \beta = \frac{1}{n'} + \beta\left(1 - \frac{1}{n'^2}\right).$$

Nach der Hertzschen Theorie würde die Relativgeschwindigkeit der Wellen gegen das strömende Wasser dieselbe sein, wie gegen ruhendes Wasser. Die Wellen würden bei der Bewegung einfach mitgeführt werden. Nach der Lorentzschen Theorie ist das nicht der Fall; infolge der Bewegung des Wassers wird die Geschwindigkeit des parallel sich fortpflanzenden Lichtes nicht um $|\mathfrak{w}|$, sondern nur um einen Bruchteil von $|\mathfrak{w}|$ vermehrt. Der Faktor $\left(1 - \frac{1}{n'^2}\right)$ in Gleichung (200a), der dieses anzeigt, wird der „Fresnelsche Fortführungskoeffizient" genannt. Fresnel war es, der zuerst die Annahme ruhenden Äthers vertrat, welche dann von H. A. Lorentz der elektromagnetischen Optik bewegter Körper zugrunde gelegt wurde. Nach Lorentz entspricht der Fortführungskoeffizient durchaus dem Faktor $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$ in der Formel (194e), welche der Theorie der Versuche von H. A. Wil-

son zugrunde liegt; er rührt, wie wir gesehen haben, daher, daß nur der an der Materie haftende Bruchteil der elektrischen Verschiebung durch die Bewegung der Materie im magnetischen Felde beeinflußt wird. Die Versuche von Fizeau, Michelson und Morley, welche die Gültigkeit jenes Ausdruckes für den Fortführungskoeffizienten bewiesen haben, zeigen, vom elektromagnetischen Standpunkte aus gedeutet, daß auch in den rasch wechselnden Feldern der Lichtwellen jene durch (198a) formulierte Beziehung für die elektrische Verschiebung zutrifft. Sie legen dafür Zeugnis ab, daß die Grundgleichungen der Elektrodynamik, zu denen die Elektronentheorie führt, auch die Optik bewegter Körper umfassen.

Unter n' ist, wie erwähnt, für ein dispergierendes Medium der Brechungsindex zu verstehen, welcher der Frequenz ν' entspricht. Aus (197b) erhalten wir daher

$$\frac{1}{n'} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\frac{dn}{d\nu} \cdot \frac{\nu\beta c}{w'},$$

wo n der Brechungsindex des Wassers ist, welcher der von einem ruhenden Beobachter wahrgenommenen Farbe zukommt. Da es bei der gewählten Näherung erlaubt ist, in den mit dem Faktor β behafteten Gliedern n' und $\frac{c}{w'}$ durch n zu ersetzen, so wird Gleichung (200a)

(200b) $$w'' = \frac{1}{n} + \beta\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\nu}{n}\frac{dn}{d\nu}\right).$$

Diese Formel rührt von H. A. Lorentz her.[1]) Bewegt sich das Medium den Lichtwellen entgegen, so ist selbstverständlich hier $-\beta$ statt β zu setzen.

§ 38. Der Druck der Strahlung auf bewegte Flächen.

Wir haben bereits in § 5 dieses Bandes von dem elektromagnetischen Lichtdruck gesprochen. Die Gesetze des Lichtdruckes sind von grundlegender Bedeutung für die thermodynamische Theorie der Wellenstrahlung. Wir dürfen daher

1) H. A. Lorentz. Theorie d. elektr. u. opt. Ersch. in bewegten Körpern. Leiden 1895, S. 102.

nicht versäumen, diese Gesetze hier zu entwickeln; auch dürfen wir uns nicht auf ruhende Flächen beschränken, sondern wir müssen die Betrachtungen auf bewegte Flächen ausdehnen.

Zwei Arten von Flächen sind es, die in der Strahlungstheorie eine Rolle spielen: Die vollkommen schwarzen und die vollkommen spiegelnden Flächen. Beide Arten von Flächen lassen die Lichtwellen nicht in ihr Inneres eindringen. Die schwarze Fläche gibt nicht zur Bildung reflektierter Wellen Veranlassung; sie verwandelt die Energie der auffallenden Strahlung vollständig in Wärme oder in Arbeit des Strahlungsdruckes, die Bewegungsgröße der auffallenden Strahlung in mechanische Bewegungsgröße des eingeschlossenen Körpers. Die vollkommen spiegelnde oder vollkommen „blanke“ Fläche hingegen verwandelt nicht den geringsten Bruchteil der auffallenden Strahlung in Wärme. Die Energie des einfallenden Lichtes findet sich, soweit sie nicht in Arbeit des Strahlungsdruckes an der spiegelnden Fläche verwandelt ist, in dem reflektierten Lichte wieder; die Bewegungsgrößen des einfallenden und des reflektierten Lichtes bestimmen den Betrag des Strahlungsdruckes. Flächen von solchen Eigenschaften finden sich als Oberflächen wirklicher Körper in der Natur nur angenähert realisiert. Auch die besten Spiegel sind nicht vollkommen blank, und die im auffallenden Lichte schwärzesten Flächen sind nicht absolut schwarz. Immerhin ist die Idealisierung, welche sich die Theorie erlaubt, indem sie von vollkommen blanken oder vollkommen schwarzen Flächen spricht, nicht bedenklicher, als die Annahme starrer Körper in der Mechanik, idealer Gase oder idealer verdünnter Lösungen in der Thermodynamik. Diese Idealisierung ermöglicht es, sich bei der Ableitung der Strahlungsgesetze von den individuellen Eigenschaften der Körper unabhängig zu machen. In der Tat sind die Entwickelungen der folgenden Paragraphen unabhängig von jeder besonderen Hypothese über die Zahl und die Eigenschaften der Moleküle und der Elektronen. Sie beruhen allein auf den Grundhypothesen der Elektronentheorie, welche in den Grundgleichungen (I bis V) ihre mathematische

Formulierung gewonnen haben. Die Grenzbedingungen an der Oberfläche des vollkommenen Spiegels, welche wir am Schlusse des § 36 aufgestellt hatten, gelten für beliebige Geschwindigkeiten des Spiegels, wenn anders jene Grundgleichungen die Einwirkung der Leitungselektronen des Spiegels auf die elektromagnetischen Vorgänge im Raume richtig formulieren.

Wie bereits in § 5 erwähnt wurde, bestimmt sich gerade für vollkommen schwarze und vollkommen spiegelnde Flächen die ponderomotorische Kraft des Feldes vollständig durch den in Gleichung (17) angegebenen Vektor

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{8\pi}\left\{2\mathfrak{E}\mathfrak{E}_\nu + 2\mathfrak{H}\mathfrak{H}_\nu - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\right\}$$

{$\mathfrak{n}$ ist ein der äußeren Normalen ν paralleler Einheitsvektor}.

Diese Flächenkraft ist nichts anderes, als die auf die Flächeneinheit bezogene Resultierende der Maxwellschen Spannungen. Würde es sich um einen Körper handeln, in dessen Inneres das elektromagnetische Feld eindringt, so würde, wie in § 5 dargelegt wurde, bei der Berechnung der resultierenden elektromagnetischen Kraft noch die zeitliche Änderung der im Körper enthaltenen elektromagnetischen Bewegungsgröße in Rechnung zu setzen sein. Für solche Körper jedoch, die von absolut schwarzen oder blanken Flächen umschlossen sind, fällt dieses Glied der resultierenden Kraft fort. Die resultierende Kraft des elektromagnetischen Feldes ergibt sich durch Integration der Flächenkraft $\mathfrak{T}$ über die Oberfläche des ruhenden Körpers.

Wie ändert sich nun der Wert der Flächenkraft, wenn der Körper in Bewegung begriffen ist? Dann erhält die Flächenkraft einen Zuwachs, da Bewegungsgröße infolge der Bewegung aufgefangen wird. Ist $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit des betreffenden Punktes der schwarzen oder blanken Fläche, so ist die von dem Flächenelemente df bei seiner Bewegung in der Sekunde aufgefangene elektromagnetische Bewegungsgröße

$$\mathfrak{w}_\nu \cdot \mathfrak{g} \cdot df.$$

Diesen Zuwachs erfährt die an df angreifende elektromagnetische Kraft durch die Bewegung des Flächenelementes. Es folgt für die auf die bewegte Flächeneinheit bezogene Kraft des Strahlungsdruckes

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} + \mathfrak{w}_\nu \mathfrak{g}. \tag{201}$$

Aus (17) und (18) erhalten wir den Ausdruck des Vektors $\mathfrak{T}'$ durch die elektromagnetischen Vektoren

$$8\pi\mathfrak{T}' = 2\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{E}_\nu + 2\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{H}_\nu - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) + \frac{2\mathfrak{w}_\nu}{c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]. \tag{201a}$$

Für einen bewegten Körper, der von einer absolut schwarzen oder blanken Fläche begrenzt ist, ergibt sich die resultierende Kraft der Strahlung durch Integration von $\mathfrak{T}'$ über die Oberfläche.

Wir wollen den erhaltenen Ausdruck noch etwas umformen. Wir gehen dabei aus von der Identität

$$\mathfrak{w}_\nu\cdot[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \mathfrak{E}_\nu[\mathfrak{H}\mathfrak{w}] + \mathfrak{H}_\nu[\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mathfrak{n}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]). \tag{202}$$

Diese beweist man, indem man die Komponente nach irgendeiner Richtung nimmt, die man mit der x-Achse zusammenfallen lassen kann. Es ist

$$\mathfrak{w}_\nu[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x + \mathfrak{E}_\nu[\mathfrak{H}\mathfrak{w}]_x + \mathfrak{H}_\nu[\mathfrak{w}\mathfrak{E}]_x = \begin{vmatrix} \mathfrak{w}_\nu & \mathfrak{w}_y & \mathfrak{w}_z \\ \mathfrak{E}_\nu & \mathfrak{E}_y & \mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{H}_\nu & \mathfrak{H}_y & \mathfrak{H}_z \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante jedoch ist gleich

$$\cos(\nu x)\begin{vmatrix} \mathfrak{w}_x & \mathfrak{w}_y & \mathfrak{w}_z \\ \mathfrak{E}_x & \mathfrak{E}_y & \mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{H}_x & \mathfrak{H}_y & \mathfrak{H}_z \end{vmatrix} = \mathfrak{n}_x(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]),$$

d. h. gleich der x-Komponente der rechten Seite von (202).

Drückt man nun den letzten Term in (201a) in der durch (202) angezeigten Weise aus, so erhält man

$$8\pi\mathfrak{T}' = 2\mathfrak{E}'\mathfrak{E}_\nu + 2\mathfrak{H}'\mathfrak{H}_\nu - \mathfrak{n}\left\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2 - \frac{2}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}])\right\}, \tag{202a}$$

wo $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ die in den Hauptgleichungen (Ic und IIc) des § 36 für bewegte Körper auftretenden Vektoren sind:

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}], \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}]. \tag{203}$$

Da nun gilt

$$\mathfrak{E}\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}^2 - \frac{1}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]), \tag{203a}$$

$$\mathfrak{H}\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}^2 - \frac{1}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]), \tag{203b}$$

so erhalten wir

$$8\pi\mathfrak{T}' = 2\mathfrak{E}'\mathfrak{E}_\nu + 2\mathfrak{H}'\mathfrak{H}_\nu - \mathfrak{n}\{\mathfrak{E}\mathfrak{E}' + \mathfrak{H}\mathfrak{H}'\} \tag{204}$$

als allgemeinen Ausdruck der elektromagnetischen Flächenkraft durch die elektromagnetischen Vektoren.

Handelt es sich um eine bewegte schwarze Fläche, so sind für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Feldstärken der einfallenden Wellen zu setzen; denn reflektierte Wellen sind hier definitionsgemäß ausgeschlossen. Anders bei dem bewegten Spiegel. Hier erfolgt die Reflexion so, daß an allen Punkten der spiegelnden Fläche die Grenzbedingungen (196) und (196a) erfüllt sind, welche das Verschwinden der tangentiellen Komponenten von $\mathfrak{E}'$ und der Normalkomponente von $\mathfrak{H}$ verlangen. Aus $\mathfrak{H}_\nu = 0$ und (vgl. Formel δ in Bd. I, S. 437)

$$0 = \left[\mathfrak{E}[\mathfrak{E}'\mathfrak{n}]\right] = \mathfrak{E}'\mathfrak{E}_\nu - \mathfrak{n}(\mathfrak{E}\mathfrak{E}')$$

folgt nun

$$8\pi\mathfrak{T}' = \mathfrak{n}\{\mathfrak{E}\mathfrak{E}' - \mathfrak{H}\mathfrak{H}'\} \tag{204a}$$

oder auch, mit Rücksicht auf (203a, b)

$$8\pi\mathfrak{T}' = \mathfrak{n}\{\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2\}. \tag{204b}$$

Diese beiden letzten Formeln bestimmen die Flächenkraft des elektromagnetischen Feldes auf einen beliebig bewegten Spiegel. Da $\mathfrak{n}$ ein der äußeren Normalen paralleler Einheitsvektor ist, so ist die Flächenkraft $\mathfrak{T}'$ stets senkrecht zur spiegelnden Fläche gerichtet. Es übt

der Strahlungsdruck keine tangentiellen Kräfte auf die vollkommen spiegelnde Fläche aus.

Die Formel (204b) ist insofern bemerkenswert, als in derselben die Bewegung des Spiegels explizite nicht auftritt. Für einen ruhenden Spiegel erhält man jene Formel, indem man den Faradayschen Längszug der zur leitenden Fläche normalen elektrischen Kraftlinien und den Querdruck der tangentiellen magnetischen Kraftlinien (I, § 89) zusammenfügt. Für einen bewegten Spiegel ist diese Deutung nicht zulässig; hier tritt $\mathfrak{T}'$ an Stelle von $\mathfrak{T}$, auch ist nicht $\mathfrak{E}$, sondern $\mathfrak{E}'$ der Vektor, welcher die Kraft auf die Einheit der am Leiter haftenden Elektrizität anzeigt, und der daher senkrecht zur vollkommen leitenden Fläche gerichtet sein muß. Dennoch ist der formale Zusammenhang des Lichtdruckes mit den Feldstärken nach (204b) für den bewegten Spiegel der gleiche, wie für den ruhenden. Natürlich sind die Werte der Feldstärken an der Spiegeloberfläche ihrerseits von der Bewegung des Spiegels abhängig.

Wir betrachten zunächst ebene Wellen, die senkrecht auf einen ruhenden ebenen Spiegel fallen. Die Spiegelebene werde als (yz)-Ebene gewählt. Die Feldstärken $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H}_1$ der einfallenden Welle seien parallel der $(-y)$-Achse bzw. der z-Achse, diejenigen der reflektierten Welle $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{H}_2$ parallel der y-Achse bzw. der z-Achse. Da für diese ebenen Wellen

$$(205) \qquad -\mathfrak{E}_{1y} = \mathfrak{H}_{1z}, \quad \mathfrak{E}_{2y} = \mathfrak{H}_{2z}$$

ist, und da an der spiegelnden Fläche die Grenzbedingung vorgeschrieben ist

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_{1y} + \mathfrak{E}_{2y} = 0,$$

so folgt

$$\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_{1z} + \mathfrak{H}_{2z} = 2\mathfrak{H}_{1z},$$

und daher

$$8\pi\mathfrak{T} = -\mathfrak{n}\mathfrak{H}_z^2 = -\mathfrak{n}\cdot 4\mathfrak{H}_{1z}^2.$$

Es findet sich demnach der normale Lichtdruck auf den ruhenden Spiegel bei senkrechter Inzidenz des Lichtes

(206) $$p = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{H}^2_{1z} = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathfrak{E}^2_{1y} + \mathfrak{H}^2_{1z}\right\}$$

gleich der doppelten Energiedichte der einfallenden Welle.

Wir gehen jetzt zum bewegten Spiegel über; die Bewegung erfolgt parallel der äußeren Normalen $\mathfrak{n}$, die jetzt mit der x-Achse zusammenfällt, d. h. entgegen den einfallenden Wellen. Die Beziehungen (205) gelten auch jetzt noch, aber die Grenzbedingung ist eine andere; es soll die tangentielle Komponente des durch (203) definierten Vektors $\mathfrak{E}'$ verschwinden. Setzen wir $\frac{\mathfrak{w}_x}{c} = \beta$, so folgt aus

$$0 = \mathfrak{E}_y' = \mathfrak{E}_y - \beta\mathfrak{H}_z = \mathfrak{E}_{1y} - \beta\mathfrak{H}_{1z} + \mathfrak{E}_{2y} - \beta\mathfrak{H}_{2z}$$

mit Rücksicht auf (205)

(207) $$\mathfrak{H}_{2z} = \mathfrak{H}_{1z} \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta};$$

ferner wird (204b)

(207a) $$8\pi\mathfrak{T}' = -\mathfrak{n}\mathfrak{H}_z^2(1-\beta^2).$$

Da nun, gemäß (207), gilt

$$\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_{1z} + \mathfrak{H}_{2z} = \mathfrak{H}_{1z} \cdot \frac{2}{1-\beta},$$

so folgt

(207b) $$8\pi\mathfrak{T}' = -\mathfrak{n}\cdot 4\mathfrak{H}^2_{1z}\frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Der Druck des senkrecht einfallenden Lichtes auf den ihm entgegen bewegten Spiegel wird hiernach

(208) $$p' = \frac{1}{2\pi}\cdot\mathfrak{H}^2_{1z}\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta} = p\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Er wird durch die Bewegung des Spiegels im Verhältnis $1+\beta : 1-\beta$ gesteigert und wird unendlich, wenn der Spiegel sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Eine Bewegung des Spiegels mit Lichtgeschwindigkeit der auffallenden Strahlung entgegen erfordert unendliche Arbeitsleistung und ist daher physikalisch nicht realisierbar.

Die Arbeitsleistung gegen den Druck der Strahlung bringt eine Steigerung der Amplituden des reflektierten Lichtes

mit sich, welche durch (207) gegeben ist. Man überzeugt sich unschwer davon, daß die erhaltenen Ergebnisse mit dem Energiesatze und dem Impulssatze in Übereinstimmung sind. Wir wollen indessen hierauf an dieser Stelle nicht eingehen. Weiter unten (§ 40) werden wir das Problem der Lichtreflexion durch einen bewegten Spiegel für den allgemeineren Fall schiefer Inzidenz behandeln, und gerade die Impulsgleichungen und die Energiegleichung werden dort an die Spitze gestellt werden.

§ 39. Der relative Strahl.

In der elementaren Theorie der Aberration bestimmt man die Richtung des relativen Strahles bekanntlich folgendermaßen. Man denkt sich den Strahl durch eine Öffnung O tretend, und, nach Durchlaufung der Strecke OP, im Aufpunkte P eintreffend. Der in P befindliche Beobachter und der Schirm, dessen Öffnung O ist, mögen die gemeinsame konstante Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ besitzen. Dann ist die Öffnung zu der Zeit, wo das Licht in P eintrifft, bereits nach O' gelangt (vgl. Abb. 5), und der Beobachter, der von der Bewegung keine Kenntnis besitzt, wird $O'P$ als Strahlrichtung bezeichnen. Die Richtung des relativen Strahles ist hiernach diejenige des Vektors

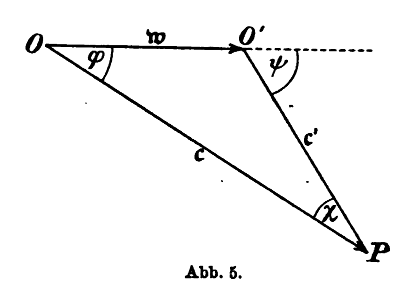


Abb. 5.

$$\mathfrak{c}' = \mathfrak{c} - \mathfrak{w}, \tag{209}$$

der die Relativgeschwindigkeit von Licht und Beobachter darstellt. Schon Bradley erklärte durch diese vom Standpunkt der Emissionstheorie des Lichtes ohne weiteres einleuchtende Konstruktion die Aberration des Fixsternlichtes infolge der Umlaufsbewegung der Erde; der diese Umlaufsbewegung darstellende periodische Teil der Erd-

geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ gibt zu einem periodischen Wechsel der Richtung des relativen Strahles, und damit zu einer jährlichen Periode der scheinbaren Örter der Fixsterne Veranlassung.

Zunächst wollen wir einige Beziehungen ableiten, die sich aus dem Dreieck der Vektoren $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{c}'$ ohne weiteres ergeben. Der Betrag von $\mathfrak{c}'$ ist

$$c' = c\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta\cos\varphi}, \quad \beta = \frac{|\mathfrak{w}|}{c}. \tag{209a}$$

Auch hat man

$$\frac{c'}{c} = \cos\chi - \beta\cos\psi, \tag{209b}$$

$$\frac{c'\cos\chi}{c} = 1 - \beta\cos\varphi. \tag{209c}$$

Ist ω der räumliche Öffnungswinkel eines in P sich vereinigenden Strahlenbündels, so entspricht ihm im relativen Strahlengange der Öffnungswinkel ω', der sich folgendermaßen bestimmt

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{d\cos\varphi}{d\cos\psi} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\cdot\frac{d\varphi}{d\psi}. \tag{210}$$

Das leuchtet sofort ein, wenn man P als Anfangspunkt eines Systemes von Polarkoordinaten betrachtet, dessen Achse durch die Richtung von $\mathfrak{w}$ gegeben ist. Der Strahlenkegel der relativen Strahlen liegt dann zwischen denselben Meridianebenen, wie derjenige der absoluten Strahlen, er erscheint nur zwischen zwei andere Breitenkreise verlegt.

Aus dem Dreieck der Abb. 5 folgt nun

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{c'}{c}, \quad \varphi = \psi - \chi,$$

folglich

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{c'}{c}\left(1 - \frac{d\chi}{d\psi}\right).$$

Da ferner

$$\frac{\sin\chi}{\sin\psi} = \frac{|\mathfrak{w}|}{c} = \beta$$

hier als Konstante zu betrachten ist, so gilt nach (209b)

$$1 - \frac{d\chi}{d\psi} = 1 - \beta\frac{\cos\psi}{\cos\chi} = \frac{c'}{c\cos\chi},$$

und folglich

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{c'^2}{c^2\cos\chi}. \tag{210a}$$

Der Begriff „Strahl“ ist nicht nur ein geometrischer, sondern auch ein physikalischer; der Betrag des Strahlvektors oder die „Strahlung“ wird gemessen durch die auf Zeiteinheit und Flächeneinheit bezogene Wärmeentwickelung in einer senkrecht zur Strahlrichtung gestellten schwarzen Fläche. Wir haben in diesem Werke bisher nur von der „absoluten Strahlung“ S gesprochen, die durch eine ruhende, senkrecht zu $\mathfrak{S}$ (oder $\mathfrak{c}$) gestellte schwarze Fläche definiert ist. Es bestimmt (vgl. § 5) $\frac{\mathfrak{S}}{c}$ gleichzeitig die in der Sekunde auf den Quadratzentimeter fallende Bewegungsgröße des Lichtes oder die Kraft des Lichtdruckes auf die schwarze Fläche. Der absoluten Strahlung stellen wir jetzt die „relative Strahlung“ S' gegenüber; diese wird gemessen durch die Wärmeentwickelung, welche in der Sekunde im Quadratzentimeter einer zur relativen Strahlrichtung (d. h. zu $\mathfrak{c}'$) senkrechten bewegten schwarzen Fläche stattfindet. Sie berechnet sich folgendermaßen:

Die Energiemenge, die in der Sekunde durch die Flächeneinheit einer im Raume zu $\mathfrak{c}'$ senkrechten, bewegten (gedachten) Fläche hindurchtritt, ist $S \cdot \frac{c'}{c}$; wir können diese auch als „relativen Energiestrom“ bezeichnen. Um die Wärmeentwickelung in der schwarzen Fläche zu bestimmen, haben wir noch die Arbeitsleistung des Lichtdruckes zu subtrahieren. Die in der Sekunde auf die Flächeneinheit auffallende Bewegungsgröße ist $\frac{\mathfrak{S}}{c} \cdot \frac{c'}{c}$, ihre Richtung ist diejenige des absoluten Strahles; sie gibt die Druckkraft der Strahlung auf die schwarze Fläche an. Folglich ist die Arbeitsleistung des Strahlungsdruckes $\frac{c'}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{S})$, und daher die relative Strahlung

$$S' = \frac{c'}{c} S - \frac{c'}{c^2}(\mathfrak{w}\mathfrak{S}). \tag{211}$$

Da es sich hier um ebene Wellen handelt, bei denen $\mathfrak{S}$ parallel zu $\mathfrak{c}$ ist, so wird mit Rücksicht auf (209)

$$S' = \frac{c'}{c^2}(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}) = S \frac{c'^2}{c^2} \cos \chi. \tag{211a}$$

Auf Grund von (210a) können wir auch schreiben

(211b) $$\frac{S'}{c'^4\omega'} = \frac{S}{c^4\omega}.$$

Verstehen wir jetzt unter dem „*relativen Strahle*“ einen Vektor $\mathfrak{S}'$, dessen Richtung diejenige von $\mathfrak{c}'$ und dessen Betrag die relative Strahlung S' ist, so erhalten wir aus (211a) ohne weiteres den *für ebene Wellen gültigen Ausdruck* von $\mathfrak{S}'$

(211c) $$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{c}'}{c^2}(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}).$$

Wir wollen dieser synthetischen Ableitung des relativen Strahles eine analytische gegenüberstellen, indem wir von dem allgemeingültigen Ausdruck von $\mathfrak{S}'$ durch die elektromagnetischen Vektoren ausgehen. Für ebene Wellen gelangen wir auf diesem Wege zur elektromagnetischen Begründung der obigen Konstruktion der relativen Strahlrichtung.

Der absolute Strahl wird bestimmt durch den Poyntingschen Vektor

(212) $$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}];$$

derselbe gibt den Energiestrom durch eine ruhende Fläche an. Der *relative Energiestrom* nach einer durch ν gekennzeichneten Richtung ist

(212a) $$\mathfrak{S}_\nu - \mathfrak{w}_\nu \frac{1}{8\pi}\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\},$$

er stellt die Energiemenge dar, welche in der Sekunde durch den Quadratzentimeter einer bewegten, senkrecht zu ν gestellten (gedachten) Fläche im Raume hindurchtritt (vgl. § 14, Gleichung 76b).

Die auf die Flächeneinheit berechnete Kraft des Strahlungsdruckes ist durch (201a) gegeben. Handelt es sich um die *relative Strahlung* auf bewegte materielle Flächen, so ist die Arbeitsleistung der Flächenkraft $\mathfrak{T}'$ von (212a) zu subtrahieren. Da $\mathfrak{n}$ jetzt nicht, wie im vorigen Paragraphen, der von der Fläche fortweisenden, sondern der nach ihr hinweisenden Normale ν parallel ist, so ist die *Arbeitsleistung*

des Strahlungsdruckes an der bewegten Fläche zu schreiben

$$(212\text{b})\quad (\mathfrak{w}\mathfrak{T}') = -\frac{1}{8\pi}\Big\{2\mathfrak{E}_\nu(\mathfrak{w}\mathfrak{E}) + 2\mathfrak{H}_\nu(\mathfrak{w}\mathfrak{H}) - \mathfrak{w}_\nu(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2) + \frac{2\mathfrak{w}_\nu}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}])\Big\}.$$

Die Differenz von (212a) und (212b) ist es, die sich als Wärmeentwickelung in einer senkrecht zu ν gestellten, bewegten schwarzen Fläche kundgibt. Wir verstehen unter der „relativen Strahlung" parallel der durch ν gekennzeichneten Richtung eben diese Differenz:

$$\mathfrak{S}_\nu + \frac{1}{4\pi}\Big\{\mathfrak{E}_\nu(\mathfrak{w}\mathfrak{E}) + \mathfrak{H}_\nu(\mathfrak{w}\mathfrak{H}) - \mathfrak{w}_\nu(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2) + \frac{\mathfrak{w}_\nu}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}])\Big\}.$$

Wir können hiernach die relative Strahlung nach irgendeiner Richtung auffassen als Komponente des Vektors

$$(213)\quad \mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + \frac{1}{4\pi}\Big\{\mathfrak{E}(\mathfrak{w}\mathfrak{E}) + \mathfrak{H}(\mathfrak{w}\mathfrak{H}) - \mathfrak{w}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2) + \frac{\mathfrak{w}}{c}(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}])\Big\}.$$

Dieser Vektor ist der relative Strahl.

Wir wollen an Stelle der Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ die durch (203) definierten Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ einführen; wir berechnen deren äußeres Produkt

$$(213\text{a})\quad [\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - \frac{1}{c}\Big[\mathfrak{E}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}]\Big] - \frac{1}{c}\Big[\mathfrak{H}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}]\Big] + \frac{1}{c^2}\Big[[\mathfrak{w}\mathfrak{E}],[\mathfrak{w}\mathfrak{H}]\Big].$$

Nach Regel (δ) und (γ) der Formelzusammenstellung in Bd. I, S. 437 ist:

$$\Big[\mathfrak{E}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}]\Big] = \mathfrak{w}\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{E}(\mathfrak{w}\mathfrak{E})$$

$$\Big[\mathfrak{H}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}]\Big] = \mathfrak{w}\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}(\mathfrak{w}\mathfrak{H})$$

$$\Big[[\mathfrak{w}\mathfrak{E}],[\mathfrak{w}\mathfrak{H}]\Big] = \mathfrak{w}\Big([\mathfrak{w}\mathfrak{E}]\mathfrak{H}\Big) - \mathfrak{H}\Big([\mathfrak{w}\mathfrak{E}]\mathfrak{w}\Big) = \mathfrak{w}\Big(\mathfrak{w}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\Big).$$

Demnach ergibt sich, wenn man (213a) mit $\frac{c}{4\pi}$ multipliziert, ein Vektor, der mit (213) identisch ist. Es ist also **der allgemeine Ausdruck des relativen Strahles durch die elektromagnetischen Vektoren**

(213b) $$\mathfrak{S}' = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'].$$

Die Komponente dieses Vektors nach irgendeiner Richtung zeigt die Wärmeentwickelung in einer senkrecht zu dieser Richtung gestellten, mit beliebiger Geschwindigkeit bewegten schwarzen Fläche an. Die Normale derjenigen Stellung der schwarzen Fläche, welche maximaler Wärmeentwickelung entspricht, ist der physikalischen Definition des Strahles gemäß die relative Strahlrichtung.

Wir haben den Nachweis zu erbringen, daß für ebene Wellen die zu Beginn dieses Paragraphen gegebene elementare Ableitung des relativen Strahles aus (213b) hervorgeht.

Für eine ebene, geradlinig polarisierte Welle bilden Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$, elektrische und magnetische Feldstärke ein Tripel aufeinander senkrechter Richtungen. Man hat, da die Beträge der beiden Feldstärken einander gleich sind,

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}[\mathfrak{c}\mathfrak{E}], \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{c}[\mathfrak{H}\mathfrak{c}].$$

Aus (203) und (209) folgt

$$\mathfrak{E}' = \frac{1}{c}[\mathfrak{H}\mathfrak{c}'], \quad \mathfrak{H}' = \frac{1}{c}[\mathfrak{c}'\mathfrak{E}].$$

Demnach wird der relative Strahl

$$\mathfrak{S}' = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{1}{c^2}\Big[[\mathfrak{H}\mathfrak{c}'], [\mathfrak{c}'\mathfrak{E}]\Big],$$

was nach Regel (δ) und (γ) in Bd. I, S. 437 übergeht in

$$\mathfrak{S}' = \frac{c}{4\pi}\frac{\mathfrak{c}'}{c^2}\Big([\mathfrak{H}\mathfrak{c}']\mathfrak{E}\Big) = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{\mathfrak{c}'}{c^2}\Big(\mathfrak{c}'[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\Big)$$

oder

(213c) $$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{c}'}{c^2}(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}).$$

Damit sind wir, von der elektromagnetischen Definition (213b) des relativen Strahles ausgehend, für ebene Wellen zu (211c) zurückgelangt. Wir sehen, daß $\mathfrak{S}'$ parallel der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{c}'$ des Lichtes gegen die auffangende Fläche ist, daß mithin die elementare Konstruktion der relativen Strahlrichtung auch vom Standpunkte der Lorentzschen Theorie die richtige ist. Gleichzeitig erhalten wir den Ausdruck (211a) bzw. (211) für die relative Strahlung ebener Wellen wieder.

Die Konstruktion des relativen Strahlenganges beruht wesentlich auf der Voraussetzung, daß die Lichtfortpflanzung im Raume durch die Bewegung der Körper nicht beeinflußt wird. Die von dieser Konstruktion ausgehende Aberrationstheorie fußt demnach auf der Annahme „ruhenden Äthers“. Die Annahme, daß der Äther sich nicht mit der Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne mitbewegt, war es, die Fresnel der Aberrationstheorie zugrunde legte. Im Gegensatze hierzu nahm Stokes an, daß der Äther von der Erde mitgeführt wird; hier werden die Gesetze der Aberration des Fixsternlichtes nur durch äußerst komplizierte und willkürliche Hypothesen über die Bewegung des Äthers in der Umgebung der Erde gewonnen. Von den elektromagnetischen Theorien entspricht die Hertzsche der Stokesschen, die Lorentzsche der Fresnelschen. Die Erklärung der Aberration vom Standpunkte der Hertzschen Elektrodynamik bewegter Körper aus begegnet ähnlichen Schwierigkeiten, wie die Stokessche auf der elastischen Lichttheorie fußende Erklärung. Vom Lorentzschen Standpunkte aus erklärt sich die Aberration ganz ungezwungen; es ist eben die Bewegung der Erde gegen das universelle, durch die Gesetze der Lichtfortpflanzung definierte Bezugssystem, welche die jährliche Periode der relativen Strahlrichtungen bedingt. Anderseits gibt die Hertzsche Theorie ohne weiteres von der Tatsache Rechenschaft, daß die elektromagnetischen und optischen Vorgänge, welche sich ausschließlich an der Erdoberfläche abspielen, genau so verlaufen, wie in einem ruhenden Systeme. Die Grundvorstellungen der Elektronen-

theorie hingegen legen die Vermutung nahe, daß die Umlaufsbewegung der Erde auch diese Erscheinungen beeinflußt und daß es möglich sein sollte, durch elektrodynamische oder optische Versuche im Laboratorium die jeweilige Richtung der Erdbewegung festzustellen. Daß dies nicht der Fall ist, beruht nach H. A. Lorentz auf einer merkwürdigen Kompensation der Wirkungen; wir kommen später hierauf zurück (§ 42 bis 44).

§ 40. Die Reflexion des Lichtes durch einen bewegten Spiegel.

Wir behandeln in diesem Paragraphen das Problem der Reflexion des Lichtes durch einen in gleichförmiger Translationsbewegung begriffenen, vollkommen blanken Spiegel. Wir gehen dabei aus von der Lorentzschen Theorie, der einzigen, auf die eine präzise Lösung des Problems sich hat begründen lassen.[1]) Wir könnten dabei in ähnlicher Weise vorgehen, wie es im § 38 für den Fall senkrechter Inzidenz geschah, wo neben den Gesetzen der Lichtfortpflanzung im Raume die an der spiegelnden Fläche vorgeschriebene Grenzbedingung herangezogen wurde. Wir ziehen es indessen vor, die allgemeinen Impulssätze und den Energiesatz zugrunde zu legen. Auf diese Weise treten die Voraussetzungen, auf denen die gegebene Lösung beruht, deutlicher hervor: Es ist erstens die Grundhypothese der Elektronentheorie, daß die Lichtfortpflanzung im Raume durch die Bewegung der Körper (hier des Spiegels) nicht beeinflußt wird. Zweitens die Annahme einer Bewegungsgröße der Lichtwellen, welche der Richtung nach durch den absoluten Strahl bestimmt, dem Betrage nach dem Quotienten aus der Energie und der Geschwindigkeiten des Lichtes gleich ist; diese Annahme kommt schon bei der Ableitung des Lichtdruckes auf ruhende Flächen ins Spiel. Drittens endlich die Eigenschaft des idealen Spiegels, die in § 38 abgeleitet wurde, keiner scherenden Druckkraft

---

M. Abraham, Boltzmann-Festschrift, S. 85. 1904. Ann. d. Phys. (4) 14. S. 236. 1904.

des Lichtes ausgesetzt zu sein. Diese dritte Voraussetzung kann, wie sich zeigen wird, auch durch das Huyghenssche Prinzip ersetzt werden.

Wir legen die (yz)-Ebene in die Spiegelebene, die x-Achse weise nach außen. Es bezeichnen β_x, β_y, β_z die durch c geteilten Komponenten der Translationsgeschwindigkeit des Spiegels. Es seien $-\alpha_1$ und $+\alpha_2$ die Cosinus der Winkel, welche die absoluten Strahlrichtungen der einfallenden und der reflektierten Welle mit der x-Achse einschließen. Das Licht sei monochromatisch, und es seien ν_1 bzw. ν_2 die Schwingungszahlen der einfallenden und reflektierten Wellen an einem im Raume festen Punkte; ν' hingegen sei die Schwingungszahl an einem Punkte des bewegten Spiegels. Dem Dopplerschen Prinzip (§ 14) zufolge sind die Schwingungszahlen ν und ν' der an einem festen und einem bewegten Punkte gezählten Lichtwellen durch die allgemeine Beziehung verknüpft

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 - \beta \cos \varphi. \tag{214}$$

Dabei ist φ der Winkel des absoluten Strahls gegen die Bewegungsrichtung. Diese Formulierung des Dopplerschen Prinzips gilt sowohl dann, wenn der Beobachter sich bewegt, als auch wenn die Lichtquelle sich bewegt, falls unter ν jedesmal die Schwingungszahl an einem absolut ruhenden Punkte verstanden wird. Aus (214) folgt nun ohne weiteres

$$\frac{\nu'}{\nu_1} = 1 - \beta \cos \varphi_1, \quad \frac{\nu'}{\nu_2} = 1 - \beta \cos \varphi_2 \tag{214a}$$

und daher bestimmt sich die Schwingungszahl des reflektierten Lichtes folgendermaßen:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1 - \beta \cos \varphi_1}{1 - \beta \cos \varphi_2}. \tag{214b}$$

Es sind S_1 und S_2 die absoluten Strahlungen des einfallenden und des reflektierten Lichtes, d. h. die Energiemengen, die in der Sekunde durch die Flächeneinheit ruhender, zur absoluten Strahlrichtung senkrechter Flächen treten. Für schief gestellte und bewegte Flächen ist die durch die Flächeneinheit

tretende Energiemenge der zur Fläche normalen Komponente der Relativgeschwindigkeit proportional. Die Normalkomponenten der Relativgeschwindigkeit sind für die einfallenden bzw. reflektierten Wellen in der gewählten Bezeichnung

$$c(\alpha_1 + \beta_x) \text{ bzw. } c(\alpha_2 - \beta_x).$$

Demnach sind die auf den Spiegel fallenden bzw. von ihm ausgesandten Energiemengen, berechnet auf Flächeneinheit und Zeiteinheit

$$S_1(\alpha_1 + \beta_x) \text{ bzw. } S_2(\alpha_2 - \beta_x)$$

und die Vektoren der auffallenden bzw. entsandten Bewegungsgröße

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{c}(\alpha_1 + \beta_x) \text{ bzw. } \frac{\mathfrak{S}_2}{c}(\alpha_2 - \beta_x).$$

Die am Spiegel angreifende Flächenkraft des Strahlungsdruckes ist gleich der vektoriellen Differenz der in der Sekunde einfallenden und reflektierten Bewegungsgröße

$$\mathfrak{T}' = \frac{\mathfrak{S}_1}{c}(\alpha_1 + \beta_x) - \frac{\mathfrak{S}_2}{c}(\alpha_2 - \beta_x). \tag{215}$$

Da eine Wärmeentwickelung nach der Definition des vollkommenen Spiegels ausgeschlossen ist, so kann Energie an den Spiegel nur in Form von Arbeitsleistung des Strahlungsdruckes abgegeben werden. Man erhält demnach

$$(\mathfrak{w}\mathfrak{T}') = S_1(\alpha_1 + \beta_x) - S_2(\alpha_2 - \beta_x). \tag{215a}$$

Nach (215) ist aber

$$(\mathfrak{w}\mathfrak{T}') = S_1 \beta \cos \varphi_1 (\alpha_1 + \beta_x) - S_2 \beta \cos \varphi_2 (\alpha_2 - \beta_x).$$

Man erhält also

$$S_1(\alpha_1 + \beta_x)(1 - \beta \cos \varphi_1) = S_2(\alpha_2 - \beta_x)(1 - \beta \cos \varphi_2). \tag{215b}$$

Es treten hier wieder die auch in den Ausdruck des Dopplerschen Prinzipes (214b) eingehenden Größen auf, deren Bedeutung uns bekannt ist. Es sind

$$c(1 - \beta \cos \varphi_1) \quad \text{bzw.} \quad c(1 - \beta \cos \varphi_2)$$

die Geschwindigkeiten, mit denen ein Punkt des bewegten Spiegels sich senkrecht gegen die Lichtwellen bewegt, oder,

anders ausgedrückt, die Geschwindigkeiten, mit denen die Lichtwellen über einen im Spiegel festen Punkt fortstreichen. Es sind ferner

$$\sqrt{1-\alpha_1^2} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{1-\alpha_2^2}$$

die Sinus der Winkel, welche die absoluten Strahlrichtungen mit der Spiegelnormalen einschließen. Demnach sind die Geschwindigkeiten, mit denen die Schnittgeraden der Wellenebenen längs der spiegelnden Ebene forteilen:

$$\frac{c(1-\beta\cos\varphi_1)}{\sqrt{1-\alpha_1^2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{c(1-\beta\cos\varphi_2)}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}.$$

Das Huyghenssche Prinzip[1]) verlangt nun, daß diese beiden Geschwindigkeiten, mit denen die Spuren der einfallenden und der gespiegelten Wellen längs der Spiegelebene forteilen, einander gleich seien. Es bestimmt die Richtung des reflektierten Strahles aus dieser Forderung

$$(216) \qquad \frac{1-\beta\cos\varphi_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}} = \frac{1-\beta\cos\varphi_2}{\sqrt{1-\alpha_2^2}};$$

es verlangt ferner, daß der reflektierte absolute Strahl in der Einfallsebene liegt.

Aus der Beziehung (216) und der aus der Energiegleichung und der Impulsgleichung gewonnenen (215b) folgt nun:

$$(216\text{a}) \qquad 0 = S_1(\alpha_1+\beta_x)\sqrt{1-\alpha_1^2} - S_2(\alpha_2-\beta_x)\sqrt{1-\alpha_2^2}.$$

Hier steht rechts nichts anderes, als die mit c multiplizierte, in die Spiegelebene fallende Komponente der Flächenkraft $\mathfrak{T}'$ des Strahlungsdruckes (vgl. 215). Wir haben damit aus dem Huyghensschen Prinzip abgeleitet, daß der Strahlungsdruck senkrecht zur Ebene des idealen Spiegels wirkt.

Wir hätten umgekehrt auch von der Forderung ausgehen können, daß der Strahlungsdruck keine scherende Komponente besitzt; wir hatten dies ja im § 38 aus der Elektronentheorie abgeleitet. Da alsdann die tangentiellen Komponenten der

1) Vgl. hierzu: F. Hasenöhrl. Wien. Ber. 113, S. 488, 1904; Ann. d. Phys. (4) 15, S. 344, 1904.

auffallenden und reflektierten Bewegungsgröße einander gleich sein müssen, so folgt ohne weiteres, daß der gespiegelte absolute Strahl in einer Ebene mit dem einfallenden Strahl und der Spiegelnormale liegt und daß die Differenz (216a) der in die Spiegelebene fallenden Komponenten der auffallenden bzw. entsandten Bewegungsgröße gleich Null ist; hieraus und aus (215b) folgt alsdann die Beziehung (216), welche das Huyghenssche Prinzip formuliert. Wir sehen also: Das Huyghenssche Prinzip und die Forderung, daß die Kraft des Strahlungsdruckes auf die Spiegelebene keine tangentielle Komponente besitzt, sind einander vollkommen äquivalent.

Es ist

$$1-\beta\cos\varphi_1 = 1+\beta_x\alpha_1 \pm \sqrt{1-\alpha_1^2}\cdot\sqrt{\beta_y^2+\beta_z^2},$$
$$1-\beta\cos\varphi_2 = 1-\beta_x\alpha_2 \pm \sqrt{1-\alpha_2^2}\cdot\sqrt{\beta_y^2+\beta_z^2}.$$

Hieraus und aus (216) folgt

$$\text{(216b)} \qquad \frac{1+\beta_x\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}} = \frac{1-\beta_x\alpha_2}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}.$$

Man sieht, daß die Richtung des reflektierten Strahles nur von der normalen Komponente der Spiegelgeschwindigkeit abhängt. Bewegt sich der Spiegel in seiner Ebene, so erfolgt die Reflexion des Lichtes genau so, wie am ruhenden Spiegel.

Mit Rücksicht auf (216) und (216b) können wir jetzt die Formel (214b), welche das Dopplersche Prinzip enthält, folgendermaßen schreiben:

$$\text{(217)} \qquad \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1+\beta_x\alpha_1}{1-\beta_x\alpha_2}.$$

Auch die Schwingungszahl des reflektierten Lichtes hängt nur von der normalen Komponente der Spiegelgeschwindigkeit ab.

Was den normalen Lichtdruck anbelangt, so folgt aus (215)

$$\text{(218)} \qquad p' = -\mathfrak{T}'_x = \frac{1}{c}\left\{S_1\alpha_1(\alpha_1+\beta_x) + S_2\alpha_2(\alpha_2-\beta_x)\right\}.$$

Er ist bestimmt, wenn man die Richtung und den Betrag der reflektierten Strahlung kennt. Letzterer aber bestimmt sich aus dem Dopplerschen Prinzip (214b) und der durch Vereinigung der Energiegleichung und Impulsgleichung gewonnenen Beziehung (215b) folgendermaßen:

$$\frac{S_1(\alpha_1+\beta_x)}{\nu_1} = \frac{S_2(\alpha_2-\beta_x)}{\nu_2}. \tag{219}$$

Die in der Sekunde auf den Spiegel fallenden und die von ihm im reflektierten Lichte entsandten Energiemengen verhalten sich wie die entsprechenden Schwingungszahlen.

Wie aus (216b) folgt, liegen die Kosinus α_1, α_2 der Wellennormalen gegen die Spiegelnormale in den einander zugeordneten Intervallen

$$-\beta_x \leqq \alpha_1 \leqq 1, \quad +\beta_x \leqq \alpha_2 \leqq 1.$$

Die Grenzen entsprechen dem im relativen Strahlengange streifenden, bzw. dem senkrecht einfallenden und reflektierten Strahle. Sieht man von dem ersteren Grenzfalle, wo nach (218) der Strahlungsdruck Null ist, ab, so gilt

$$\alpha_1 + \alpha_2 > 0.$$

Infolgedessen gestattet es die Identität

$$(1+\beta_x\alpha_1)^2(1-\alpha_2^2) - (1-\beta_x\alpha_2)^2(1-\alpha_1^2)$$
$$= (\alpha_1+\alpha_2)\{2\beta_x - 2\beta_x\alpha_1\alpha_2 + (1+\beta_x^2)(\alpha_1-\alpha_2)\},$$

aus (216b) die Gleichung abzuleiten

$$2\beta_x - 2\beta_x\alpha_1\alpha_2 + (1+\beta_x^2)(\alpha_1-\alpha_2) = 0. \tag{220}$$

Aus dieser Beziehung ergeben sich zwei neue Formeln, die beide zur Bestimmung des Reflexionswinkels dienen können:

$$\frac{2}{1-\beta_x^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta_x} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\beta_x}, \tag{220a}$$

$$\frac{1+\beta_x\alpha_1}{\alpha_1+\beta_x} = \frac{1-\beta_x\alpha_2}{\alpha_2-\beta_x}. \tag{220b}$$

Aus der letzten Gleichung, im Verein mit (216b), folgt:

$$\frac{\alpha_1 + \beta_x}{\sqrt{1-\alpha_1^2}} = \frac{\alpha_2 - \beta_x}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}. \tag{220c}$$

Diese Beziehung führt zu einer sehr einfachen Konstruktion der Richtung des reflektierten Strahles, falls der Spiegel sich senkrecht zu seiner Ebene bewegt. Alsdann sind Zähler und Nenner in (220c) nichts anderes, als die durch c geteilten Komponenten der Relativgeschwindigkeit des einfallenden bzw. des reflektierten Lichtes gegen den Spiegel. Bewegt sich der Spiegel senkrecht zu seiner Ebene, so gilt das Reflexionsgesetz: Im relativen Strahlengange ist der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich. Im allgemeinen Falle gilt dieses Gesetz für den relativen Strahlengang, den ein nur an der Bewegung des Spiegels senkrecht zu seiner Ebene teilnehmender Beobachter wahrnimmt.

Aus der absoluten Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ des einfallenden Lichtes bestimmt sich die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_1'$ gegen den bewegten Spiegel nach der Konstruktion des vorigen Paragraphen. Aus derselben Konstruktion (Abb. 5) kann man, wenn die Richtung der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_2'$ des reflektierten Strahles gegen den Spiegel bekannt ist, die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_2$ desselben finden, deren Betrag c ja ein für allemal gegeben ist. Bewegt sich der Spiegel senkrecht zu seiner Ebene, so schließen, wie wir fanden, die Vektoren $-\mathfrak{c}_1'$ und $\mathfrak{c}_2'$ den gleichen Winkel mit dem Vektor $\mathfrak{w}$ ein, man hat demnach

$$\psi_1 + \psi_2 = \pi.$$

Da ferner der Vektor $\mathfrak{w}$ beiden Dreiecken gemeinsam und die Längen der den Winkeln ψ_1 bzw. ψ_2 gegenüberliegenden Seiten gleich c sind, so findet sich $\chi_1 = \chi_2$, d. h. der Winkel, den der relative und absolute Strahl miteinander einschließen, ist der gleiche für das einfallende und das reflektierte Licht. Dabei ist, wenn die Bewegung des Spiegels in Richtung der äußeren Normalen erfolgt, der

Einfallswinkel im relativen Strahlengange um χ_1 kleiner als im absoluten, und der Reflexionswinkel im absoluten Strahlengange um χ_2 kleiner als im relativen, so daß der Reflexionswinkel im absoluten Strahlengange um

$$\chi_1 + \chi_2 = 2\chi_1$$

kleiner ist, als der Einfallswinkel. Erfolgt dagegen die Bewegung des Spiegels in entgegengesetztem Sinne, so ist im absoluten Strahlengange der Reflexionswinkel um $2\chi_1$ größer als der Einfallswinkel. Bewegt sich der Spiegel schief zu seiner Ebene, so kann man den reflektierten **absoluten** Strahl in derselben Weise bestimmen, indem man nur den zur Spiegelebene senkrechten Bestandteil von $\mathfrak{w}$ berücksichtigt. Dagegen der unter Berücksichtigung des gesamten $\mathfrak{w}$ bestimmte **relative** Strahlengang befolgt in diesem allgemeinen Falle keine einfach auszusprechende Regel; der Reflexionswinkel ist hier im allgemeinen nicht gleich dem Einfallswinkel. Nur im Falle einer **Bewegung parallel der Spiegelebene** liegt die Sache wieder sehr einfach; wie im absoluten, so ist auch im relativen Strahlengange in diesem Falle der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich.

Handelt es sich um ein einfallendes Lichtbündel, dessen Strahlenkegel im absoluten Strahlengange den körperlichen Winkel ω_1 einschließt, so bestimmt sich der Öffnungswinkel ω_2 des gespiegelten Strahlbündels am einfachsten aus (220a). Man findet

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\,\alpha_2}{d\,\alpha_1} = \left(\frac{\alpha_2 - \beta_x}{\alpha_1 + \beta_x}\right)^2,$$

was nach (220b) und (217) ergibt

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{-2}. \tag{221}$$

Die von einem absolut ruhenden Beobachter wahrgenommenen Öffnungswinkel des einfallenden und des gespiegelten Strahlbündels verhalten sich wie die reziproken Quadrate der beobachteten Schwingungszahlen.

Aus (219) folgt übrigens durch Einführung von (217) und (220b)

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2. \tag{222}$$

Die absoluten Strahlungen verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungszahlen.

Infolge der genannten Relationen geht (218) über in

$$p' = \frac{S_1}{c}(\alpha_1 + \beta_x)^2 \left\{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_x} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \beta_x}\right\}$$

oder, gemäß (220a), in

$$p' = \frac{2 S_1 (\alpha_1 + \beta_x)^2}{c(1 - \beta_x^2)}. \tag{223}$$

Das ist der Betrag des normalen Strahlungsdruckes, bei schiefer Inzidenz des Lichtes. Bei senkrechter Inzidenz wird die Gleichung (208) des § 38 wieder erhalten. Auch bei schiefer Inzidenz wird der Strahlungsdruck unendlich für $\beta_x = 1$, d. h. wenn der Spiegel sich senkrecht zu seiner Ebene mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Fällt auf die Vorderseite des Spiegels eine noch so geringe Strahlung, so kann sich der Spiegel senkrecht zu seiner Ebene nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Bemerkenswert ist der Gegensatz zum Falle des bewegten Elektrons, wo Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit keineswegs auszuschließen war.

§ 41. Die Temperatur der Strahlung.

Die strahlende Wärme ist für die Ökonomie des Weltalls von der größten Bedeutung; sind es doch die Sonnenstrahlen, die alle Bewegung und alles Leben auf der Erde unterhalten. Wenn anders die Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie überhaupt eine allgemeine Gültigkeit besitzen, so müssen sie nicht nur auf die in dem materiellen Körper enthaltene, sondern auch auf die strahlende Wärme Anwendung finden. Daher hat schon R. Clausius bei der Begründung der Thermodynamik die thermischen Wirkungen der Strahlung in Betracht ge-

zogen, und G. Kirchhoff ist bei seinen für die Strahlungstheorie grundlegenden Untersuchungen von der Gültigkeit des Carnot-Clausiusschen Prinzipes für die Licht- und Wärmestrahlung ausgegangen. Wir wollen in diesem Paragraphen die Folgerungen entwickeln, welche sich aus der Anwendung der Thermodynamik auf die Wellenstrahlung ergeben.

Wir denken uns ein Bündel unpolarisierten Lichtes von dem kleinen Öffnungswinkel ω. Durch eine senkrecht zur Achse des Bündels gestellte Fläche messen wir die Strahlungsintensität S; bei Lichtstrahlen im engeren Sinne könnten wir die Lichtstärke photometrisch messen, wir denken uns hier jedoch stets die Strahlungsintensität bolometrisch, d. h. durch ihre thermische Wirkung gemessen. S ist bereits auf die Einheit der auffangenden Fläche berechnet; es erweist sich ferner als zweckmäßig, sie auf die Einheit des körperlichen Winkels zu beziehen und die Strahlung spektral zu zerlegen. Wir nennen

$$\frac{S}{\omega} = \int_0^\infty H d\nu \tag{224}$$

die „gesamte Helligkeit" des Strahlbündels und H die Helligkeit der spektral zerlegten Strahlung oder die „Helligkeit" schlechtweg. Beobachtet man ein monochromatisches Lichtbündel, oder auch ein aus verschiedenfarbigem Lichte zusammengesetztes, in verschiedenen Entfernungen von der entsendenden Fläche, so nimmt die Strahlungsintensität S umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von der leuchtenden Fläche ab; in demselben Maße aber nimmt der körperliche Winkel ω ab, unter welchem die leuchtende Fläche gesehen wird. Die Helligkeit jeder Farbe und auch ihr über das ganze Spektrum erstrecktes Integral ändert sich bei der freien Fortpflanzung des Lichtes im Raume nicht.

Mit M. Planck[1]) werden wir den Vorgang der ungestörten Lichtfortpflanzung im Raume, da er sich durch passend gewählte Hohlspiegel oder Linsen rückgängig machen läßt, als

1) M. Planck. Ann. d. Phys. (4) 1, S. 719, 1900; 3, S. 764, 1900.

umkehrbaren Vorgang im Sinne der Thermodynamik betrachten. Da bei einem umkehrbaren, ohne Arbeitsleistung verlaufenden Vorgange die Temperatur sich nicht ändert, so erscheint es sachgemäß, einer bestimmten Helligkeit monochromatischer Strahlung in eindeutiger Weise eine bestimmte Temperatur zuzuordnen. Es können hiernach zwei Lichtquellen, z. B. die Sonne und eine Öllampe, dieselbe Lichtstärke ergeben, während die „Helligkeiten", entsprechend den verschiedenen Öffnungswinkeln der Lichtbündel, ganz verschiedene sind. Der weit größeren Helligkeit des Sonnenlichtes entspricht eine weit höhere Temperatur. Dabei brauchen die Temperaturen der einzelnen im Lichtbündel vertretenen Farben im allgemeinen nicht die gleichen zu sein. Die Temperatur jeder einzelnen Farbe aber bleibt bei der freien Fortpflanzung des Lichtes konstant.

Es erscheint hiernach unzulässig, thermodynamische Betrachtungen auf streng ebene Wellen anzuwenden; denn für verschwindenden Öffnungswinkel ω wird bei endlicher Strahlungsintensität die Helligkeit nach (224) unendlich. In der Tat würde ja eine endliche Strahlung pro Flächeneinheit eine unendliche Gesamtemission der unendlich entfernten Lichtquelle voraussetzen, was wir ausschließen müssen. Es kann zwar der Öffnungswinkel ω sehr klein, aber niemals gleich Null angenommen werden. Ebensowenig ist es vom Standpunkte der Thermodynamik aus gestattet, von streng monochromatischem Lichte zu reden; denn eine endliche Strahlungsintensität in einem verschwindenden Intervalle von Schwingungszahlen würde unendliche Helligkeit H, d. h. unendliche Temperatur ergeben; unendliche Temperatur bedeutet aber in der Thermodynamik freie Verwandelbarkeit in Arbeit. Auf die Energie streng periodischer elektrischer Wellen ist demnach der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, welcher die Verwandelbarkeit in Arbeit einschränkt, überhaupt nicht anzuwenden. Von den rein periodischen langen Wellen sind die kurzen, durch ihre leuchtende und wärmende Wirkung sich kundgebenden Wellen gerade dadurch unterschieden, daß sie

nicht streng monochromatisch sind. Jede „natürliche“ Strahlung, z. B. diejenige einer Spektrallinie, erfüllt ein zwar kleines, aber doch von Null verschiedenes spektrales Intervall von Schwingungszahlen. Gerade die Anwesenheit einer großen Zahl von Partialwellen, welche in regelloser Weise miteinander interferieren, ist nach M. Planck diejenige Eigenschaft der „natürlichen Strahlung“, welche die Anwendung der Thermodynamik ermöglicht. Wenn wir im folgenden von „monochromatischem Lichte“ reden, so verstehen wir darunter stets solches, dessen Schwingungszahlen ein kleines, aber doch von Null verschiedenes Intervall $d\nu$ erfüllen.

Es entspricht der von uns durchweg zugrunde gelegten Auffassung, daß wir die Strahlung S durch eine absolut ruhende Fläche gemessen denken, und ebenso unter ω den Öffnungswinkel des Kegels der absoluten Strahlrichtungen verstehen. Dementsprechend bezieht Gleichung (224) auch die Helligkeit auf das universelle Bezugssystem, welches unsere Grundgleichungen postulieren. Wie die Energie und die Bewegungsgröße der Lichtwellen, so ist auch ihre Helligkeit und ihre Temperatur durch die Eigenschaften des „absoluten Strahles“ bestimmt.

Um nun den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik für die Ermittelung der Beziehung zwischen Helligkeit und Temperatur fruchtbar zu machen, müssen wir einen reversibeln, mit Arbeitsleistung verbundenen Vorgang angeben, bei welchem die Helligkeit der Strahlung verändert wird. Ein solcher Vorgang ist der im vorigen Paragraphen behandelte, nämlich die Reflexion eines Lichtbündels durch einen bewegten vollkommenen Spiegel; wir überzeugen uns unschwer davon, daß derselbe umkehrbar im Sinne der Thermodynamik ist.

Wir stellen zu diesem Zwecke zwei Vorgänge einander gegenüber. Bei dem ersten sei S_1 die absolute Strahlung, ω_1 der kleine Öffnungswinkel des einfallenden monochromatischen Lichtbündels, $d\nu_1$ sei die Breite des Intervalles der Schwingungszahlen; α_1 sei der Kosinus des Winkels, welchen die Achse des Bündels mit der Spiegelnormale einschließt. Durch

(224a) $$S_1 = H_1 \omega_1 d\nu_1$$

ist sodann die Helligkeit H_1 des einfallenden Bündels definiert. Bei dem ersten der betrachteten Vorgänge soll nun β_x positiv sein, d. h. der Spiegel soll sich dem einfallenden Lichte entgegen bewegen. Dabei wird von äußeren Kräften gegen den Strahlungsdruck eine gewisse Arbeit geleistet. Aus (216b) bestimmt sich der Kosinus α_2 des Reflexionswinkels; der Reflexionswinkel ist kleiner als der Einfallswinkel. Nach (217) wird die Schwingungszahl des Lichtes bei der Reflexion vergrößert und gemäß (222) die absolute Strahlung im Verhältnis des Quadrates der Schwingungszahlen verstärkt. Da nach (221) der Öffnungswinkel des Bündels im umgekehrten Verhältnis des Quadrates der Schwingungszahlen verringert wird, so ist

(225) $$\frac{H_1 d\nu_1}{H_2 d\nu_2} = \frac{S_1}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_2}{S_2} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^4.$$

Dabei ist, wie aus (217) hervorgeht, das Verhältnis $\nu_2 : \nu_1$ bei gegebener Bewegung des Spiegels ein konstantes, so daß man hat

$$\frac{d\nu_2}{d\nu_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}.$$

Demgemäß wird

(226) $$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^3.$$

Die Helligkeiten der beiden Bündel verhalten sich wie die dritten Potenzen der Schwingungszahlen.

Dem soeben betrachteten Vorgange, bei dem α_2 der Kosinus des Reflexionswinkels war, stellen wir jetzt einen zweiten Vorgang gegenüber; hier soll der Einfallswinkel denjenigen Wert besitzen, den vorher der Reflexionswinkel besaß. Wie der Wert von α_2, so sollen jetzt auch die Werte von ν_2, S_2, H_2 und ω_2, die bei dem ersten Vorgange dem reflektierten Bündel zukamen, jetzt dem einfallenden Bündel zugeschrieben werden. Gleichzeitig soll die Bewegung des Spiegels in entgegengesetzter Richtung vor sich gehen, derart, daß β_x einen dem Betrage nach gleichen, dem Vorzeichen nach aber entgegen

gesetzten Wert annimmt. Setzen wir dementsprechend $-\beta_x$ an Stelle von β_x und den Index 2 an Stelle des Index 1, so bleibt (216b) erfüllt, wenn α_1 jetzt der Kosinus des Reflexionswinkels ist. Wie der Reflexionswinkel des zweiten Vorganges gleich dem Einfallswinkel des ersten ist, so ist nach (217) die kleinere Schwingungszahl ν_1 jetzt diejenige des reflektierten Bündels. Folglich sind nach (219) die in der Sekunde umgewandelten Mengen strahlender Wärme die gleichen wie vorher; die Umwandlung geschieht indessen in entgegengesetztem Sinne. Die gleiche Arbeit, die vorher gegen den Strahlungsdruck geleistet wurde, wird nunmehr von ihm geleistet. Im thermodynamischen Sinne gesprochen macht also der zweite Vorgang den ersten rückgängig. Die Reflexion eines Lichtbündels durch einen bewegten vollkommenen Spiegel ist ein reversibler Prozeß.

Den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik auf die in der Sekunde umgewandelten Wärmemengen anwendend, erhalten wir

$$\frac{S_1(\alpha_1+\beta_x)}{\vartheta_1} = \frac{S_2(\alpha_2-\beta_x)}{\vartheta_2}. \tag{227}$$

Dabei sind ϑ_1 und ϑ_2 die Temperaturen der beiden monochromatischen Lichtbündel, gemäß der thermodynamischen Definition der absoluten Temperatur.

Aus (227) in Verbindung mit der aus dem Dopplerschen Prinzip und der Energie- und Impulsgleichung abgeleiteten Relation (219) folgt

$$\vartheta_1 : \vartheta_2 = \nu_1 : \nu_2. \tag{227a}$$

Die Temperaturen der beiden Lichtbündel verhalten sich wie ihre Schwingungszahlen.

Hieraus und aus (226) ergibt sich

$$H_1 : H_2 = \vartheta_1^3 : \vartheta_2^3. \tag{227b}$$

Die Helligkeiten der beiden monochromatischen Bündel verhalten sich wie die dritten Potenzen der absoluten Temperaturen. An Stelle von (225) aber können wir schreiben

$$H_1\, d\nu_1 : H_2\, d\nu_2 = \vartheta_1^4 : \vartheta_2^4. \tag{227c}$$

Wir postulierten nun, daß einem jeden monochromatischen Lichtbündel eine Temperatur zugeordnet werde, welche eindeutig durch seine Farbe und Helligkeit bestimmt ist. Die geforderte universelle Beziehung muß, wie für jedes Lichtbündel, so auch für die beiden oben betrachteten gelten. Die Relationen (227a, b) schränken die Form dieser universellen Beziehung ein; die allgemeinste, ihnen genügende Bestimmung der Temperatur ist:

$$\vartheta = \nu \cdot f\left(\frac{H}{\vartheta^3}\right), \tag{228}$$

wo f eine willkürliche Funktion ist. Wir können dafür auch schreiben

$$H = \vartheta^3 \cdot g\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right). \tag{228a}$$

Damit haben wir das thermodynamische Gesetz der Wellenstrahlung erhalten.

Die beiden Relationen (227a) und (227b), aus denen das Gesetz sich ergibt, mögen als Verschiebungsgesetz und Verstärkungsgesetz bezeichnet werden. Das Verschiebungsgesetz (227a) ordnet bei der Vergleichung der Helligkeiten, die zwei verschiedenen Temperaturen entsprechen, zwei verschiedene Farben einander zu, deren Schwingungszahlen im Verhältnis der Temperaturen stehen. Das Verstärkungsgesetz (227b) besagt sodann, daß die Helligkeiten der einander so zugeordneten Farben sich verhalten, wie die dritten Potenzen der absoluten Temperaturen. Ist für eine gegebene Temperatur empirisch die Helligkeit in ihrer Abhängigkeit von der Schwingungszahl gegeben, so ist diese Abhängigkeit durch das thermodynamische Strahlungsgesetz (228a) für jede andere Temperatur bestimmt.

Das Verstärkungsgesetz hat zuerst L. Boltzmann[1]) abgeleitet, indem er einen von Bartoli angegebenen Kreisprozeß verwandte und den Maxwellschen Lichtdruck einführte. Er erhielt es nicht in der Form (227b), sondern in derjenigen Form, die aus (227c) hervorgeht, wenn man zwei Lichtbündel

1) L. Boltzmann. Ann. d. Phys. 22, S. 291, 1884.

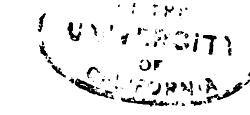
betrachtet, in denen alle Farben die gleiche Temperatur ϑ_1 bzw. ϑ_2 besitzen. Es wird gestattet sein, solches Licht, in welchem alle Farben vertreten sind, und zwar mit der gleichen Temperatur, als „weißes Licht" zu bezeichnen. Vergleicht man die Gesamthelligkeiten zweier weißer Lichtbündel, so wird

$$\int_0^\infty H_1\, d\nu_1 : \int_0^\infty H_2\, d\nu_2 = \vartheta_1{}^4 : \vartheta_2{}^4. \tag{228b}$$

Die gesamten Helligkeiten zweier Bündel weißen Lichtes verhalten sich wie die vierten Potenzen ihrer absoluten Temperaturen. Das ist das Gesetz, welches zuerst von Stefan als empirisches Gesetz aufgestellt und dann, wie erwähnt, von Boltzmann theoretisch begründet wurde. Die Gleichung (227c) überträgt das Stefan-Boltzmannsche Gesetz auf zwei monochromatische Lichtbündel.

Das Verschiebungsgesetz wurde zuerst von W. Wien angegeben.[1]) Doch vermochte dieser Autor es nicht, den Zusammenhang desselben mit dem Dopplerschen Prinzip und dem Strahlungsdrucke in einwandsfreier Weise zu formulieren. Das gelingt in der Tat nur dann, wenn man von einer präzisen Lösung des Problemes der Lichtreflexion durch einen bewegten Spiegel ausgeht. Auf dem hier verfolgten, zuerst vom Verfasser dieses Werkes eingeschlagenen Wege erhält man das Verschiebungsgesetz und das Verstärkungsgesetz mit einem Schlage; ihr Zusammenhang mit den Prinzipien der elektromagnetischen Mechanik tritt bei dem gegebenen Beweise deutlich hervor. Wir durften uns nicht mit der Lösung des Reflexionsproblemes für den Fall senkrechter Inzidenz ebener Wellen begnügen, weil die Kenntnis des Verhältnisses der Öffnungswinkel der beiden Lichtbündel zur Ermittelung des Verhältnisses der Helligkeiten erforderlich war und das Verhältnis der Öffnungswinkel (221) durch Differentiation von α_2 nach α_1 erhalten wird. Um diese Differentiation ausführen zu

1) W. Wien. Berliner Sitzungsber. 1893, S. 55. Ann. d. Phys. 52, S. 132, 1894.



können, muß das Reflexionsproblem für den Fall schiefer Inzidenz gelöst sein.

Wie man sieht, ergibt sich das thermodynamische Gesetz der natürlichen Strahlung aus den allgemeinen Eigenschaften der elektromagnetischen Strahlung auf Grund des thermodynamischen Temperaturbegriffes. Das Gesetz ist auf jede beliebige natürliche Licht- und Wärmestrahlung anzuwenden, wie sie auch immer entstanden sein mag. Die so bestimmte Temperatur der Strahlung ist aber im allgemeinen durchaus nicht mit der Temperatur des strahlenden Körpers identisch. Wir müssen die Beziehungen, die zwischen der Temperatur des emittierenden Körpers und der Temperatur der entsandten Strahlung bestehen, hier kurz erläutern, da auf ihnen die Vergleichung der strahlungstheoretischen und der gewöhnlichen gastheoretischen Temperaturskala beruht.

Natürliches Licht kann auf zwei wesentlich verschiedene Weisen entstehen: Durch reine Temperaturstrahlung und durch Luminiszenz. Die reine Temperaturstrahlung ist ein rein thermischer Vorgang. Die Energie der Wellen entstammt dem Wärmevorrat des emittierenden Körpers und ist durch seine Temperatur bestimmt; chemische und elektrische Vorgänge spielen bei dieser Art der Emission nicht mit. Bei der Luminiszenz hingegen spielen Vorgänge nicht thermischer Natur mit, und demgemäß ist die entsandte Strahlung nicht ausschließlich durch die Temperatur der Lichtquelle bedingt. Daher kann bei den Vorgängen der Luminiszenz von einer allgemeingültigen Beziehung zwischen den Temperaturen der Lichtquelle und der Strahlung keine Rede sein. Man hat gefunden, daß zu den auf Luminiszenz beruhenden Vorgängen die Emission der Linienspektra gehört. Die Temperatur des Lichtes der Spektrallinien gestattet daher durchaus keinen Rückschluß auf die Temperatur des entsendenden Körpers.

Für die reine Temperaturstrahlung lassen sich Beziehungen zur Temperatur des leuchtenden Körpers aus der Thermodynamik ableiten. Man denke sich einen Hohlraum, dessen Wände reine Temperaturstrahler sind; diese Wände

seien auf einer gegebenen Temperatur ϑ gehalten. Nach dem Clausiusschen Axiome müssen sich in diesem Systeme, da andere als rein thermische Vorgänge ausgeschlossen sind, die Temperaturen ausgleichen; es muß sich schließlich ein thermischer Gleichgewichtszustand herstellen, bei welchem alle Teile des Systemes die gleiche Temperatur ϑ besitzen. Das gilt nicht nur von der Temperatur der materiellen Körper, die man etwa in den Hohlraum bringen mag, sondern auch von der Temperatur der den Hohlraum erfüllenden Strahlung selbst. Die Temperatur der Hohlraumstrahlung ist gleich der Temperatur der Wände. Ein im Innern des Hohlraumes befindlicher Beobachter würde von allen Seiten Licht der gleichen Helligkeit und der gleichen spektralen Zusammensetzung empfangen. Die Helligkeit muß sich der Temperatur des Hohlraumes so zuordnen, wie es das thermodynamische Strahlungsgesetz (228a) fordert. Die Temperatur aller Farben muß die gleiche sein, so daß das Licht als „weiß" in dem oben angegebenen Sinne zu bezeichnen ist. Könnte man sich in das Innere eines Hohlraumes begeben, dessen Wände so stark erhitzt sind, daß sie infolge ihrer Temperatur leuchten, so könnte man das thermodynamische Strahlungsgesetz experimentell prüfen, wenigstens in demjenigen Temperaturbereiche, in welchem eine auf der gastheoretischen Skala beruhende Temperaturmessung möglich ist.

Da es nun aus naheliegenden Gründen unmöglich ist, sich in einen derartig erhitzten Hohlraum hineinzubegeben, so hat man einen Kunstgriff angewandt; derselbe war nicht so selbstverständlich, wie er uns jetzt erscheinen mag; er besteht darin, daß man in die Wand des Hohlraumes ein kleines Loch bohrt und durch dieses hineinblickt. Dieser Gedanke ist zuerst von L. Boltzmann[1]) ausgesprochen und später von O. Lummer und W. Wien[2]) durchgeführt worden. Ist die Öffnung des Hohlraumes hinreichend klein, so stört sie die Her-

1) L. Boltzmann. Ann. d. Phys. 22, S. 35, 1884.
2) O. Lummer und W. Wien. Ann. d. Phys. 56, S. 451, 1895.

stellung des thermischen Gleichgewichtes im Hohlraume nicht; die entsandte Strahlung ist dann diejenige „weiße Strahlung", welche der Temperatur des Hohlraumes entspricht. Die experimentelle Untersuchung der Hohlraumstrahlung durch O. Lummer und E. Pringsheim[1]) hat sowohl das auf die Gesamtstrahlung bezügliche Stefan-Boltzmannsche Verstärkungsgesetz, als auch das Verschiebungsgesetz durchaus bestätigt. Von einer Bestätigung kann natürlich nur so weit die Rede sein, als die auf den Gasgesetzen beruhende Temperaturskala sich realisieren läßt. Bei Temperaturen oberhalb 1150° C stößt die Anwendung der gastheoretischen Skala auf Schwierigkeiten. Hier ist diese Skala durch die strahlungstheoretische Temperaturskala zu ersetzen, welche sich auf das thermodynamische Strahlungsgesetz gründet.

Die experimentelle Untersuchung der aus dem Hohlraume heraustretenden Strahlung hat nicht nur zur Bestätigung des thermodynamischen Strahlungsgesetzes (228a) geführt, sondern auch zur Bestimmung der dort noch willkürlich gelassenen Funktion der Variabeln $\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right)$. Die Messungen, an denen hauptsächlich O. Lummer und E. Pringsheim, H. Rubens und F. Kurlbaum, sowie F. Paschen Anteil haben, sind von M. Planck[2]) durch die Formel zur Darstellung gebracht worden:

$$H = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1}, \tag{229}$$

mit den Werten der Konstanten k und h:

$$k = 1{,}346 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}} \tag{229a}$$

$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}. \tag{229b}$$

Die theoretische Begründung, welche Planck seiner Formel gegeben hat, stützt sich auf diejenigen Hypothesen über die

1) O. Lummer und E. Pringsheim. Ann. d. Phys. 63, S. 395, 1897. 3, S. 159. 1900. Vgl. auch O. Lummer, Congrès international de physique. II. S. 41. Paris 1900.

2) M. Planck. Ann. d. Phys. 4, S. 553, 1901.

Wärmebewegung der Moleküle, die in der kinetischen Gastheorie ihren Ausdruck finden; sie verknüpft die universelle Konstante k aufs engste mit der sogenannten Boltzmann-Drudeschen Konstanten α, d. h. der mittleren lebendigen Kraft eines Moleküles bei der absoluten Temperatur 1. Planck findet[1])

$$\alpha = \frac{3}{2} k = 2{,}02 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}}. \tag{229c}$$

Für sehr hohe Temperaturen und sehr lange Wellen, d. h. für kleine ν und große ϑ, geht (229) über in

$$H = 2k\vartheta \cdot \frac{\nu^2}{c^2}. \tag{229d}$$

Diese Formel hat H. A. Lorentz[2]) gewonnen, indem er von der Elektronentheorie der Metalle (§ 32) ausging und für eine dünne Schicht eines Metalles die Emission langwelliger Wärmestrahlen durch die in Zickzackbahnen sich bewegenden Elektronen bestimmte; indem er anderseits die Absorption langer Wellen in der Metallschicht aus der elektrischen Leitfähigkeit berechnete, was nach den Ergebnissen von E. Hagen und H. Rubens (vgl. I, § 71) gestattet ist, konnte er den Quotienten aus Emissionsvermögen und Absorptionsvermögen ermitteln, der nach dem Kirchhoffschen Gesetze für alle reinen Temperaturstrahler den gleichen Wert besitzt und eben durch die Helligkeit H bestimmt ist (vgl. unten). Bei der Lorentzschen Ableitung hat also α direkt die Bedeutung der mittleren lebendigen Kraft eines freien Elektrons im Metalle. Mit der Boltzmann-Drudeschen Konstanten ist der Wert der Masse eines Wasserstoffatomes eng verknüpft, und dieser wieder hängt mit dem elektrischen Elementarquantum zusammen (vgl. § 1). So kann denn aus der Konstante k der Strahlungsformel der Wert des elektrischen Elementarquantums ermittelt werden. Es ergibt sich nach Planck

---

1) M. Planck. Ann. d. Phys. 4, 564, 1901.

2) H. A. Lorentz. Akad. van Wetensch. de Amsterdam 11. 1903, S. 787.

$$e = 4{,}69 \cdot 10^{-10} \tag{230}$$

elektrostatische Einheiten, was nicht so sehr von dem in § 1 angegebenen, auf ganz verschiedenem Wege gefundenen Werte (2) abweicht.

Wie k, so muß auch die Konstante h der Strahlungsformel eine universelle Bedeutung haben; da die einzige elektromagnetische Konstante des Äthers die Lichtgeschwindigkeit c ist, so muß es sich um eine Konstante handeln, welche von den Eigenschaften der ponderablen Materie oder der Elektronen abhängt; es muß aber eine von den individuellen Eigenschaften des Körpers unabhängige Größe sein.

Wie man sieht, dringt das vollständige Strahlungsgesetz (229) tief in die molekularen Eigenschaften der Materie ein. Sein Beweis beruht auf Voraussetzungen, deren Darlegung uns hier zu weit führen würde. Wir wollen nur noch in Kürze das Kirchhoffsche Gesetz formulieren, welches für die Emission und Absorption der reinen Temperaturstrahler gilt.

Bildet der Körper, um den es sich handelt, einen Teil der Wand eines Hohlraumes, so sendet er einer im Innern befindlichen Fläche diejenige Strahlung zu, die sich aus seiner Temperatur gemäß dem Strahlungsgesetze (229) berechnet. Diese Strahlung dringt aber nur zum Teil aus dem Innern des Körpers hervor, zum anderen Teil ist es reflektierte Strahlung. Leuchtet der Körper nur mit eigenem Lichte, ohne daß Licht aus anderen Lichtquellen auf ihn fällt, so ist seine Emission eine geringere. Auf diese Eigenstrahlung bezieht sich nun das Kirchhoffsche Gesetz. Ein kleines ebenes Flächenstück f_1 der Oberfläche des Körpers sendet einem Punkte P des Raumes Eigenstrahlung der Schwingungszahl ν in der Helligkeit H' zu. Anderseits wird von der Energie einer Lichtwelle der gleichen Schwingungszahl, die von P aus nach f_1 geht, durch den Körper bei der betreffenden Temperatur der Bruchteil A absorbiert. Wir können dann das Kirchhoffsche Gesetz folgendermaßen aussprechen: Der Quotient aus Helligkeit H' und Absorptionsvermögen A für Strahlen be-

stimmter Farbe und Richtung hat für alle Temperaturstrahler bei gegebener Temperatur den gleichen Wert

$$H' : A = H. \tag{231}$$

Er ist gleich der Helligkeit weißer Strahlung von der betreffenden Temperatur.

G. Kirchhoff hat sein Gesetz etwas anders formuliert, indem er unter „Emissionsvermögen" diejenige Strahlung versteht, welche die Fläche f_1 einer anderen f_2 zusendet, und die Strahlung nicht nach der Skala der Schwingungszahlen, sondern nach derjenigen der Wellenlängen zerlegt denkt. Auch unterscheidet er neben der Farbe und Richtung die Polarisationsrichtung, wovon wir hier abgesehen haben. Der Kirchhoffsche Beweis ist ein recht umständlicher. Einen übersichtlichen Beweis des Gesetzes findet man bei E. Pringsheim.[1]) Dieser Forscher faßt das Kirchhoffsche Gesetz als Bedingung dafür auf, daß jeder nur infolge seiner Temperatur leuchtende Körper, in die Wand eines Hohlraumes eingefügt, in der Helligkeit des weißen Lichtes leuchtet, indem zu der Eigenstrahlung gerade so viel reflektierte (oder geborgte) Strahlung kommt, daß H' zu H ergänzt wird. Hier wird also der Satz von der Hohlraumstrahlung zum Fundament der Strahlungstheorie gemacht, während Kirchhoff diesen Satz aus seinem auf anderem Wege bewiesenen Gesetze herleitet.

Die Gültigkeit des Kirchhoffschen Gesetzes ist, wie hervorgehoben wurde, auf die Vorgänge der reinen Temperaturstrahlung beschränkt. Luminiszenzerscheinungen, wie Fluoreszenz und Phosphoreszenz fallen nicht in seinen Gültigkeitsbereich. Würde man luminiszierende Körper in den Hohlraum bringen, so würden die chemischen oder elektrischen Prozesse, welche die Emission begleiten, imstande sein, die Herstellung des Temperaturgleichgewichtes zu verhindern. Daher ist auch die Anwendung auf die Spektrallinien, in der man früher die wesentliche Bedeutung des Kirchhoffschen Gesetzes meinte er-

---

1) E. Pringsheim. Verh. der deutschen physik. Gesellschaft 3, S. 81, 1901.

blicken zu sollen, nicht berechtigt. Die dort festgestellten Beziehungen zwischen Emission und Absorption beruhen, wie wir erwähnten, nicht auf den Gesetzen der Thermodynamik, sondern auf den allgemeinen Prinzipien der Schwingungslehre.

Die festen Körper sind meist reine Temperaturstrahler. Da die neuere Forschung das vollständige Strahlungsgesetz kennen gelehrt hat, so kennen wir H. Wir sind also imstande, aus der beobachteten Helligkeit der Eigenstrahlung das Absorptionsvermögen, und umgekehrt aus dem bekannten Absorptionsvermögen die Helligkeit der Eigenstrahlung auf Grund des Kirchhoffschen Gesetzes zu berechnen.

Da, allgemein zu reden, das Absorptionsvermögen eines Körpers ein echter Bruch ist, so ist

$$H' < H.$$

Es ist die Helligkeit des Lichtes, welches ein Körper gegebener Temperatur ϑ entsendet, kleiner als die Helligkeit weißen Lichtes der gleichen Temperatur ϑ. Ordnen wir der Helligkeit H' des vom Körper entsandten Lichtes die Temperatur ϑ' durch die Strahlungsformel (229) zu, so ergibt sich

$$\vartheta' < \vartheta.$$

Die Temperatur der entsandten Strahlung ist geringer als die Temperatur des entsendenden Körpers. Das gilt im allgemeinen, wenn es sich um reine Temperaturstrahlung handelt. Da nun der Vorgang der Emission durch einen ruhenden Körper ohne Arbeitsleistung verläuft, so folgt aus der Thermodynamik: Die Emission des Lichtes ist ein irreversibler Prozeß.

Eine Ausnahme findet nur statt, wenn $A = 1$ ist. Das würde bedeuten, daß der Körper im auffallenden Lichte schwarz erscheint, indem er alles Licht verschluckt. Aus (231) folgt: Ein im auffallenden Lichte schwarzer Körper sendet weißes Eigenlicht aus, dessen Helligkeit der Temperatur des Körpers entspricht. Man hat daher diejenige Strahlung, die wir „weiße“ genannt haben, auch als „Strahlung des vollkommen schwarzen Körpers“ bezeichnet, und hat die universelle

Strahlungsformel durch Beobachtung der Eigenstrahlung möglichst „schwarzer" Körper zu bestimmen gesucht. Doch ist die Realisierung des schwarzen Körpers auf diese Weise nicht möglich gewesen. Die „schwarze" oder „weiße" Strahlung ist erst durch Konstruktion des Hohlraumes verwirklicht worden. Die Emission des Lichtes durch einen Hohlraum, die ja als besonderer Fall der Lichtfortpflanzung im Raume aufgefaßt werden kann, ist ein reversibler Prozeß. Denn die strahlende Wärme behält hier ihre Temperatur bei.

§ 42. Die Lichtzeit in einem gleichförmig bewegten System.

Wir hatten in § 39 die Aberration des Fixsternlichtes erklärt, indem wir zeigten, daß nach der Lorentzschen Theorie die Richtung des von einem mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ bewegten Beobachter wahrgenommenen relativen Strahles durch den Vektor bestimmt ist (Gleichung 209)

$$\mathfrak{c}' = \mathfrak{c} - \mathfrak{w}, \tag{232}$$

d. h. durch den Vektor der Relativgeschwindigkeit von Licht und Beobachter. Unter $\mathfrak{w}$ war dabei die Geschwindigkeit der Erde zu verstehen. Berücksichtigt man nur die Umlaufsbewegung um die Sonne, indem man eine gemeinsame Bewegung des gesamten Sonnensystemes zunächst außer acht läßt, so ist $|\mathfrak{w}|$ nahezu konstant; es ist

$$\beta = \frac{|\mathfrak{w}|}{c} = 10^{-4}. \tag{232a}$$

Welchen Einfluß hat nun die Erdbewegung auf dasjenige Licht, welches von irdischen Lichtquellen entsandt wird? Läßt sich nicht durch Beobachtung dieses Lichtes, also durch optische Versuche im Laboratorium, die Bewegung der Erde feststellen? Diese Frage führt uns dazu, die Lichtfortpflanzung in einem gleichförmig bewegten Systeme zu behandeln.

Die Richtung des absoluten, zur Zeit t in einem Aufpunkte P eintreffenden Strahles ist durch den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ bestimmt (Abb. 2 S. 87), der vom Orte E' des Entsendens aus nach dem Aufpunkte hin gezogen ist. In E' befand sich die Licht-

quelle zu einer um die Latenszeit $\tau = \frac{r}{c}$ zurückliegenden Zeit $t - \tau$. Zur Zeit t, wo das Licht in P anlangt, befindet sich die Lichtquelle im Punkte E; sie hat die Strecke $\mathfrak{w} \cdot \frac{r}{c}$ zurückgelegt. Der nach dem Aufpunkte P hin von dem gleichzeitigen Orte der Lichtquelle aus gezogene Fahrstrahl EP mag jetzt mit $\mathfrak{r}'$ (statt mit $\mathfrak{R}$) bezeichnet werden. Es ist

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{w} \cdot \frac{r}{c}. \tag{232b}$$

Da $\mathfrak{r}$ die absolute Strahlrichtung anzeigt, so ist

$$\frac{\mathfrak{r}}{r} = \frac{\mathfrak{c}}{c},$$

es folgt mithin aus (232) und (232b)

$$\frac{\mathfrak{r}'}{r} = \frac{\mathfrak{c} - \mathfrak{w}}{c} = \frac{\mathfrak{c}'}{c}. \tag{232c}$$

Es wird demnach die Richtung des relativen Strahles durch den von der gleichzeitigen Lage der Lichtquelle aus gezogenen Fahrstrahl angezeigt, d. h. in einem gleichförmig bewegten Systeme sieht man die Lichtquelle dort, wo sie sich gerade befindet. Die gemeinsame Bewegung von Lichtquelle und Beobachter ist demnach durch Beobachtung der Strahlrichtung durchaus nicht festzustellen.

Ähnlich wie mit der Richtung verhält es sich mit der Farbe des Lichtes. Hatten wir doch bereits in § 14 gezeigt, daß bei einer gemeinsamen gleichförmigen Translation der Lichtquelle und des Beobachters die Dopplersche Korrektion fortfällt. Die Schwingungen irdischer Lichtquellen werden von einem mit der Erde bewegten Beobachter richtig gezählt. Auf die wahrgenommene Farbe ist demnach die Erdbewegung gleichfalls ohne Einfluß.

Dagegen sollte man vermuten, daß die Erdbewegung durch Messung der Lichtzeit sich feststellen ließe. Denn die seit dem Augenblicke des Entsendens verstrichene Zeit ist konstant auf Kugeln, die um den Ort E' des Entsenders (Abb. 2) gezogen sind. Der gleichzeitige Ort E der Lichtquelle liegt

exzentrisch zu diesen Wellenflächen. Es muß demnach die Latenszeit eine andere in dem bewegten Systeme sein als in dem ruhenden, und es fragt sich, ob nicht hier die Beobachtung einsetzen und einen wahrnehmbaren Einfluß der Erdbewegung feststellen könnte. Diese Frage bedarf der genaueren Untersuchung.

Aus dem Dreieck der Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{w} \cdot \frac{r}{c}$ folgt

$$r^2 = r'^2 + r^2 \beta^2 + 2 r' r \beta \cos \psi,$$

oder

$$r^2 \varkappa^2 - 2 r r' \beta \cos \psi = r'^2, \quad \varkappa^2 = 1 - \beta^2.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergibt als Wert des (stets positiven) r

$$(233) \qquad r = \varkappa^{-2} \left\{ r' \beta \cos \psi + \sqrt{r'^2 \varkappa^2 + r'^2 \beta^2 \cos^2 \psi} \right\}.$$

Wir führen an Stelle des Fahrstrahles $\mathfrak{r}'$ mit den Komponenten

$$x' = r' \cos \psi, \quad y', \quad z'$$

den Vektor $\mathfrak{r}_0$ ein, mit den Komponenten

$$(233\text{a}) \qquad x_0 = \frac{x'}{\varkappa}, \quad y_0 = y', \quad z_0 = z'.$$

Diesen Zusammenhang zwischen dem Fahrstrahl $\mathfrak{r}'$ im bewegten Systeme Σ' und dem eingeführten Hilfsvektor $\mathfrak{r}_0$ wollen wir symbolisch darstellen durch

$$(234) \qquad \mathfrak{r}' = (\varkappa, 1, 1)\, \mathfrak{r}_0.$$

Deutet man $x_0\, y_0\, z_0$ als Koordinaten eines Systemes Σ_0, so entsteht dieses System aus dem betrachteten bewegten Systeme Σ' durch eine Streckung parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis $\varkappa^{-1}$. Die Einführung eines solchen ruhenden Hilfssystemes hat uns schon früher (§ 18 S. 163, Gleichung 105), bei der Behandlung der gleichförmigen Translation elektrischer Ladungen, gute Dienste geleistet.

Jetzt können wir (233) schreiben

$$\varkappa r = \beta x_0 + r_0.$$

Division durch c ergibt für die Lichtzeit τ die Gleichung

$$\varkappa\tau = \tau_0 + \frac{\beta x_0}{c}. \tag{235}$$

Dabei ist $\tau_0 = \frac{r_0}{c}$ die Lichtzeit in dem ruhenden Hilfssysteme Σ_0, aus welchem das bewegte System durch eine Kontraktion parallel der Bewegungsrichtung, im Verhältnis $\varkappa$, hervorgeht.

Wir wollen zunächst nur Größen erster Ordnung in β berücksichtigen, Größen der Ordnung β^2 jedoch streichen. Begnügen wir uns mit dieser Annäherung, so haben wir $\varkappa$ durch 1 zu ersetzen. Es wird dann das System Σ_0 identisch mit Σ'. Wir können daher (235) schreiben

$$\tau = \tau' + \frac{\beta x'}{c}. \tag{235a}$$

Dabei ist τ' die Lichtzeit, die in dem ruhenden Systeme zur Durchlaufung einer gewissen Strecke erforderlich ist. Wird nun das System in Bewegung gesetzt und die gleiche Strecke im relativen Strahlengang im System durchlaufen, so entspricht dem zugehörigen absoluten Strahlengang im Raume die Lichtzeit τ. Wie wir sehen, ist τ größer oder kleiner als τ', je nachdem der relative Strahl einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der Bewegungsrichtung einschließt. Die Differenz der Lichtzeiten im bewegten und im ruhenden Systeme ist von der ersten Ordnung in β; man sollte meinen, daß sie der Messung zugänglich wäre. Sie wäre es auch, wenn es möglich wäre, die an zwei verschiedenen Punkten des bewegten Systemes gemessenen Zeiten mit beliebiger Genauigkeit aufeinander zu beziehen; das ist indessen nicht möglich.

Am genauesten ist die Zeit durch optische oder elektrische Signale festzulegen. Wir denken uns ein ruhendes System; einen Punkt O desselben wählen wir als Bezugspunkt. In dem Momente, den wir als Anfang der Zeitrechnung festlegen, geben wir von O aus ein Lichtzeichen. Ein in P befindlicher Beobachter wird zur Zeit des Eintreffens des Signales die Zeit t notieren, die sich als Quotient aus dem Lichtwege OP und

der universellen Konstanten c der Grundgleichungen berechnet. Zwei in O und P befindliche Beobachter können so durch Lichtzeichen, oder allgemeiner durch elektrische Zeichen, ihre Chronometer vergleichen. Diese Vergleichung beruht auf der Isotropie der Lichtfortpflanzung, welche für ein ruhendes System von unseren Grundgleichungen gefordert wird. Die Zeit t, die an so verglichenen und gleichlaufenden Uhren abgelesen wird, ist es, die in den Grundgleichungen auftritt. Ihre Definition setzt die Existenz eines absolut ruhenden Bezugssystemes voraus.

Nun beziehen sich aber unsere Zeitmessungen in Wirklichkeit auf ein bewegtes System, in welchem die Lichtfortpflanzung nicht mehr nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit vor sich geht. Dennoch wollen wir uns die Vergleichung der in O und P befindlichen Chronometer in der oben angegebenen Weise ausgeführt denken, indem wir die Bewegung des Systemes unberücksichtigt lassen und so verfahren, als ob die relative Geschwindigkeit des Lichtes auch jetzt noch unabhängig von der Richtung, und zwar gleich c, wäre. Die so für die Punkte des gleichförmig bewegten Systemes festgelegte Zeit t' wollen wir mit H. A. Lorentz die „Ortszeit" des betreffenden Punktes nennen. Offenbar besteht zwischen der Ortszeit t' und der allgemeinen Zeit t eben diejenige Beziehung, die oben für τ' und τ abgeleitet wurde,

$$t = t' + \frac{\beta x'}{c}. \tag{236}$$

Kontrollieren wir die Chronometer, indem wir ein Lichtzeichen umgekehrt von P nach O übermitteln und den im relativen Strahlengange zurückgelegten Lichtweg in Rechnung ziehen, so finden wir ihre Angaben bestätigt. Die Gangdifferenz $\left(\frac{\beta x'}{c}\right)$ zweier die allgemeine Zeit t und die Ortszeit t' anzeigender Uhren, die in P stattfindet, verschwindet nämlich wieder, wenn man zu O zurückkehrt. Die Differenz zwischen Ortszeit und allgemeiner Zeit ist eben nur eine Funktion des Ortes im gleichförmig bewegten Systeme; sie verschwindet daher beim

Durchlaufen eines im bewegten System geschlossenen Weges. Gibt man die Lichtzeichen nicht direkt von O nach P, sondern schaltet eine Reihe von Zwischenstationen ein, so gelangt man zu demselben Werte der Ortszeit; es kommt nur die Differenz der parallel der Bewegungsrichtung des Systemes gemessenen Koordinaten von Endpunkt und Anfangspunkt des im relativen Strahlengang durchlaufenen Lichtweges in Frage; diese gibt, mit $\left(\frac{\beta}{c}\right)$ multipliziert, die Abweichung der Ortszeit von der allgemeinen Zeit an.

Aus der Definition der Ortszeit fließt nun die selbstverständliche Folgerung: Die zur Durchlaufung einer gegebenen Strecke $\mathfrak{r}'$ im bewegten System erforderliche Lichtzeit ist von der Geschwindigkeit des Systemes unabhängig (was Größen erster Ordnung in β anbelangt), wenn sie durch die Differenz der Ortszeiten gemessen wird, die dem Entsenden und dem Eintreffen des Lichtes entsprechen. Die so gemessene Lichtzeit ist eben nicht τ, sondern τ'; τ' jedoch ist der durch c geteilte im relativen Strahlengange durchlaufene Lichtweg. Dieser Lichtweg ist für eine Strecke von gegebener Länge von deren Orientierung gegen die Bewegungsrichtung des Systemes unabhängig.

Wir sind jetzt in der Lage, zu beurteilen, inwieweit die Beobachtung den Einfluß der Erdbewegung auf die Lichtzeit feststellen könnte. Wird die Lichtzeit mit Hilfe von rotierenden Spiegeln, Zahnrädern oder dergleichen gemessen, so kommt es darauf an, durch welche Mittel die Stellung derselben reguliert wird. Wird sie durch optische oder elektromagnetische Mittel reguliert, so kommt das auf dasselbe heraus, als wenn die Zeitmessung nach Ortszeit geschieht. Alsdann fällt jeder Einfluß der Erdbewegung fort, es ergibt sich dieselbe Lichtzeit, ob nun der Strahl parallel oder entgegen der Bewegungsrichtung der Erde sich fortpflanzt. Um den Einfluß der Erdbewegung festzustellen, bedarf es einer nicht elektromagnetischen Kontrolle der Apparate. Dabei müßte die Stellung der

rotierenden Spiegel oder Zahnräder so genau reguliert sein, daß Abweichungen in ihrer Stellung, wie sie in der Zeit $\frac{\beta x'}{c}$ vorkommen, mit Sicherheit vermieden sind; diese Zeit ist aber höchstens gleich dem Bruchteil 10^{-4} der Lichtzeit. Eine so genaue mechanische Kontrolle des Ganges der Apparate dürfte kaum durchführbar sein. Steht man auf dem Standpunkte der elektromagnetischen Weltanschauung, welche die mechanischen Kräfte auf elektromagnetische zurückzuführen strebt, so würde man auch eine solche mechanische Regulierung als eine Regulierung nach Ortszeit anzusehen haben; man müßte dann erwarten, daß der Versuch, den Einfluß der Erdbewegung auf die Lichtzeit zu entdecken, unter allen Umständen ein negatives Ergebnis hätte.

Wir haben uns hier darauf beschränkt, die Fortpflanzung des Lichtes im leeren Raume zu behandeln, von der Mitwirkung dielektrischer Körper haben wir abgesehen. Das erhaltene Ergebnis jedoch gilt auch in allgemeineren Fällen, wie von H. A. Lorentz auf Grund der Feldgleichungen des § 36 bewiesen worden ist[1]; beschränkt man sich auf Größen erster Ordnung in β und auf unmagnetisierbare Nichtleiter, so gilt folgender Satz: Die Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ hängen im gleichförmig bewegten Systeme in derselben Weise von der Ortszeit t' und den relativen Koordinaten $(x'\,y'\,z')$ ab, wie im ruhenden Systeme $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ von der allgemeinen Zeit t und den Koordinaten (xyz) abhängen. In derselben Weise entsprechen einander die von der Verschiebung der Polarisationselektronen herrührenden elektrischen Momente $\mathfrak{P}$ im bewegten und im ruhenden System. Dabei ist angenommen, daß die quasielastischen Kräfte, welche die Elektronen in die Gleichgewichtslage ziehen, keine Änderung erster Ordnung durch die Bewegung erfahren; von der elektromagnetischen Masse, die bei dispergierenden Körpern ins Spiel kommt, folgt dies aus unseren früheren Entwickelungen. Das Fehlen eines

1) H. A. Lorentz. Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895.

bemerkbaren Einflusses erster Ordnung der Erdbewegung auf das von irdischen Lichtquellen herrührende Licht ist auch bei Mitwirkung wägbarer durchsichtiger Körper mit der Elektronentheorie sehr wohl vereinbar. Es erklärt sich ebenso wie das negative Ergebnis zahlreicher auf die Entdeckung eines Einflusses der Erdbewegung hinzielender rein elektromagnetischer Versuche auf Grund dieser Theorie, ohne daß es notwendig wäre, zu neuen Hypothesen seine Zuflucht zu nehmen.

§ 43. Der Versuch von Michelson.

Wir wollen uns jetzt nicht mehr auf Größen erster Ordnung in β beschränken, sondern den exakten Ausdruck (235) der Lichtzeit τ zugrunde legen. Es stellt dabei τ_0 die Lichtzeit in dem ruhenden Hilfssystem Σ_0 vor, das aus dem bewegten System Σ' durch eine Streckung parallel der Bewegungsrichtung, im Verhältnis $\varkappa^{-1}$, entstanden ist. Zwei Fahrstrahlen $\mathfrak{r}'$ in Σ' bzw. $\mathfrak{r}_0$ in Σ_0 sind durch (234) aufeinander bezogen.

Es werde nun der Fahrstrahl $\mathfrak{r}'$ des bewegten Systemes im relativen Strahlengange zweimal durchlaufen, einmal in hinläufigem, das andere Mal in rückläufigem Sinne. Es seien τ_+ und τ_- die entsprechenden Lichtzeiten. Nach (235) ist dann

$$\tau_+ + \tau_- = 2\varkappa^{-1} \cdot \tau_0 \tag{237}$$

die gesamte, für den Hinweg und Rückweg erforderliche Lichtzeit.

Der gesamte, im absoluten Strahlengang zurückgelegte Lichtweg ist

$$l = 2\varkappa^{-1} \cdot r_0 = \varkappa^{-1} l_0. \tag{237a}$$

Wir denken uns nun in Σ' diejenigen Punkte P, die auf einer um O als Mittelpunkt geschlagenen Kugel vom Radius r' liegen. Würde das System ruhen, so wäre der gesamte Lichtweg OPO für alle diese Punkte P der gleiche, nämlich $2r'$. Die Bewegung des Systemes bringt es nun, wie Gleichung (237a) besagt, mit

sich, daß der Lichtweg l ein anderer ist, je nach dem Winkel, den der relative Strahl OP mit der Richtung der Bewegung einschließt. Denn einer Kugel in Σ' entspricht in Σ_0 ein parallel der x-Achse im Verhältnis $\varkappa^{-1}$ gestrecktes Rotationsellipsoid; derjenige Radiusvektor r_0 dieses Rotationsellipsoides, welcher dem betreffenden Fahrstrahl OP entspricht, ist nach (237a) für die Länge des absoluten Lichtweges maßgebend. Vergleicht man insbesondere zwei Fahrstrahlen gleicher Länge in Σ', von denen der erste parallel, der zweite senkrecht zur Bewegungsrichtung weist, so verhalten sich die entsprechenden Radienvektoren in Σ_0 nach (234) wie $\varkappa^{-1}:1$; in demselben Verhältnis müssen nach (237a) die Längen der beiden, im absoluten Strahlengange durchlaufenen Lichtwege stehen. Die Differenz Δl derselben ist demnach

$$\text{(237b)} \quad \Delta l = (\varkappa^{-1} - 1)\, l = \left\{(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} - 1\right\} l = \frac{1}{2}\beta^2 l,$$

wenn Größen vierter und höherer Ordnung in β gestrichen werden.

Auf die Entdeckung dieser zuerst von Maxwell aus der Annahme ruhenden Äthers abgeleiteten Differenz der Lichtwege, welche zwei parallel bzw. senkrecht zur Erdbewegung gerichteten relativen Strahlen entsprechen, zielte der Versuch von A. Michelson[1]) hin. Es wurden zwei Lichtstrahlen zur Interferenz gebracht, welche, von derselben Lichtquelle ausgehend, längs zweier zueinander senkrechter Arme OP und OQ sich fortgepflanzt hatten und dort durch Spiegel zurückreflektiert waren. Indem jedes Lichtbündel mehrmals hin und her reflektiert wurde, konnte die Länge l des Lichtweges auf 22 m gebracht werden. Es wurde nun zuerst der Arm OP in Richtung der Erdbewegung gestellt und dann durch Drehung des Apparates um einen rechten Winkel der Arm OQ in diese Lage gebracht. Dabei wäre eine Verschiebung der Interferenz-

1) A. Michelson. American Journal of Science (3) 22, S. 120, 1881. Michelson und Morley. American Journal of Science (3) 34, S. 333, 1887. Phil. Mag. (5) 24, S. 449, 1887.

streifen zu erwarten gewesen. In Bruchteilen der Wellenlänge des verwandten Natriumlichtes gemessen, beträgt die für die Verschiebung maßgebende doppelte Differenz der beiden Lichtwege

$$\frac{2\Delta l}{\lambda} = \frac{\beta^2 l}{\lambda} = \frac{10^{-8} \cdot 22 \cdot 10^2}{5{,}9 \cdot 10^{-5}} = 0{,}37. \tag{237c}$$

Die erhaltenen Verschiebungen der Interferenzstreifen aber waren kleiner als 0,02 des Streifenabstandes.

Das negative Ergebnis des Michelsonschen Interferenzversuches spricht gegen die Annahme ruhenden Äthers, mithin auch gegen die Lorentzsche Theorie, falls die bei der Ableitung von (237b) stillschweigend gemachte Voraussetzung zutrifft, daß die Abmessungen der festen Körper auf der bewegten Erde die gleichen sind, die sie auf der ruhenden Erde wären. Läßt man die Möglichkeit einer Dimensionsänderung infolge der Erdbewegung zu, so sind die Betrachtungen entsprechend abzuändern. In der Tat haben Fitzgerald und H. A. Lorentz das negative Ergebnis des Michelsonschen Versuches erklärt, indem sie zur Hypothese der Kontraktion der Materie infolge der Erdbewegung ihre Zuflucht nahmen: Es sollen die Körper infolge der Erdbewegung eine Kontraktion im Verhältnis $\varkappa$ parallel der Bewegungsrichtung erfahren, derart, daß die Punkte, die auf der ruhenden Erde auf einer Kugel liegen würden, auf der bewegten Erde auf einem Heaviside-Ellipsoid liegen.

Betrachtet man in dem gleichförmig bewegten Systeme Σ' die Punkte P, die auf einem Heaviside-Ellipsoide um O liegen, und vergleicht die Lichtwege, welche nach (237a) dem relativen Strahlengang OPO entsprechen, so findet man, daß sie alle den gleichen Wert haben. Denn geht man hier in der durch (234) angezeigten Weise zu dem ruhenden Hilfssysteme Σ_0 über, so stellt sich heraus, daß dem Heaviside-Ellipsoide in Σ' eine Kugel in Σ_0 entspricht, daß demnach allen Radienvektoren OP des Heaviside-Ellipsoides derselbe Wert von r_0 und folglich, nach (237a), derselbe absolute Lichtweg zukommt.

Nach der Fitzgerald-Lorentzschen Hypothese ist demnach ein positives Ergebnis des Interferenzversuches ausgeschlossen, nicht nur, was Größen zweiter Ordnung, sondern auch, was Größen beliebiger Ordnung anbelangt. Wird der Arm OQ statt OP beim Michelsonschen Versuch der Richtung der Erdbewegung parallel gestellt, so wird OQ im Verhältnis $\varkappa$ verkürzt, OP im Verhältnis $\varkappa^{-1}$ verlängert und die hierdurch bedingte Veränderung der Lichtwege kompensiert gerade die infolge der Bewegung der Erde stattfindende, so daß keine Verschiebung der Interferenzstreifen zu erwarten ist.

Man könnte nun einwenden, daß die Dimensionsänderungen fester Körper, wenn sie auch sehr klein sind, der Messung zugänglich sein müßten. Das wäre aber nur dann möglich, wenn man die Abmessungen der Körper durch „absolut ruhende“ Maßstäbe messen könnte. Wir sind aber auf solche Maßstäbe angewiesen, die sich mit der Erde bewegen; diese erfahren nach der Kontraktionshypothese bei der Bewegung der Erde dieselbe Längenänderung, wie die zu messenden Körper; eine Kugel des irdischen Maßstabes ist der Kontraktionshypothese zufolge ein Heaviside-Ellipsoid des „absolut ruhenden“ Maßstabes. Mit irdischen Maßstäben kann man diese Behauptung weder bestätigen noch widerlegen. Auch wenn man zur Längenmessung optische Methoden verwendet, ist es selbstverständlich unmöglich, die behauptete Kontraktion der Materie festzustellen. Man würde dann die Länge eines Stabes durch den Lichtweg messen, während beim Michelsonschen Versuch der Lichtweg durch die Länge eines festen Stabes gemessen wird. Der Einfluß der Erdbewegung auf Lichtweg einerseits und Länge des Stabes anderseits kompensiert sich aber gerade so, daß sie auf der bewegten Erde gleich erscheinen, wenn sie auf der ruhenden gleich wären; eine optische oder elektrische Messung kann also niemals die behauptete Anisotropie der Körper auf der bewegten Erde feststellen.

Ein Einfluß der Erdbewegung bleibt jedoch nach (237a) bestehen. Während in dem ruhenden Systeme Σ_0, in welches

die Erde, zur Ruhe gebracht, übergehen würde, der Lichtweg OPO gleich l_0 wäre, ist der wahre Lichtweg auf der bewegten Erde im Verhältnis $\varkappa^{-1}$ vergrößert. Da nun unsere Zeiteinheit unabhängig von optischen Messungen festgelegt ist, so muß die Lichtgeschwindigkeit, gemessen auf der bewegten Erde, im Verhältnis $\varkappa^{-1}$ größer sein als die Lichtgeschwindigkeit, gemessen in einem absolut ruhenden Systeme; letztere ist identisch mit der Konstante c der Grundgleichungen. Es müßte demnach die universelle Konstante c im Verhältnis $\varkappa$ kleiner sein als die durch irdische Messungen bestimmte Lichtgeschwindigkeit. Die Abweichung beträgt allerdings nur $c \cdot \frac{1}{2} \beta^2 = 1{,}5$ m pro Sekunde, sie liegt also durchaus innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Der soeben erörterte Umstand läßt es als zweckmäßig erscheinen, bei der Abbildung des bewegten Systemes Σ' auf das ruhende Hilfssystem Σ_0 gleichzeitig eine neue Zeiteinheit zugrunde zu legen. In der Tat ist die „Ortszeit" t_0 bei Berücksichtigung von Größen zweiter und höherer Ordnung in β zu definieren durch

$$\varkappa t = t_0 + \frac{\beta x_0}{c}. \tag{238}$$

Wird β^2 gestrichen, so geht die so definierte Ortszeit t_0 in die im vorigen Paragraphen eingeführte t' über (Gleichung 236). Wie die in Strenge gültige Gleichung (235) lehrt, ist die durch die Differenz der Ortszeiten t_0 gemessene Lichtzeit im bewegten System Σ' für jeden, im relativen Strahlengang durchlaufenen Weg $\mathfrak{r}'$ die gleiche wie für den entsprechenden Lichtweg $\mathfrak{r}_0$ des ruhenden Hilfssystemes Σ_0. Trifft die Behauptung der Kontraktionshypothese zu, daß ein ruhendes System Σ_0, in Bewegung gesetzt, in das durch

$$\mathfrak{r}' = (\varkappa, 1, 1)\, \mathfrak{r}_0 \tag{239}$$

dargestellte System Σ' übergeht, so ist jeder Einfluß der Erdbewegung auf die Lichtzeit ausgeschlossen (auch ein Einfluß zweiter und höherer Ordnung), falls die zur Messung verwandten Apparate optisch oder elektrisch reguliert werden.

Die zur Erklärung des Michelsonschen Versuches eingeführte Kontraktionshypothese erscheint zunächst bedenklich. H. A. Lorentz hat indessen versucht, sie plausibel zu machen, indem er von der Vorstellung ausging, daß die Molekularkräfte, welche die Form fester Körper bestimmen, elektrischer Natur sind. An jedem Moleküle des ruhenden Körpers halten sich, dieser Vorstellung zufolge, die von den übrigen Molekülen herrührenden elektrostatischen Kräfte das Gleichgewicht. Wird nun der Körper in eine gleichförmige Translationsbewegung versetzt, so werden die Molekularkräfte abgeändert, indem zu dem elektrischen Felde ein magnetisches tritt. Wie in § 18 dargelegt wurde, entspricht dem Gleichgewichte der elektrostatischen Kräfte $\mathfrak{E}_0$ im ruhenden Systeme Σ_0 ein Gleichgewicht der elektromagnetischen Kräfte $\mathfrak{F}$ (hierfür ist jetzt $\mathfrak{E}'$ zu schreiben) in einem bewegten Systeme, welches aus Σ_0 durch eine Kontraktion im Verhältnis $\varkappa$ parallel der Bewegungsrichtung hervorgeht. Dieses bewegte System ist nach (239) kein anderes, als das von der Kontraktionshypothese angenommene System Σ'. In Σ' würde also an jedem Moleküle Gleichgewicht der Molekularkräfte bestehen, wenn es in dem ruhenden Systeme Σ_0 bestand; allgemein stehen die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}_0$ auf die ruhende und die elektromagnetische Kraft $\mathfrak{E}'$ auf die mitbewegte Einheit der Ladung, die in zwei einander entsprechenden Punkten von Σ_0 bzw. Σ' herrschen, in dem durch (106c, S. 165) ausgedrückten Zusammenhange; wir wollen diese Beziehungen symbolisch darstellen durch

$$\mathfrak{E}' = (1, \varkappa, \varkappa)\, \mathfrak{E}_0. \tag{240}$$

Betrachtet man die Molekularkräfte in ruhenden Körpern als elektrostatische Kräfte und läßt man die Wirkungen der regellosen Molekularbewegungen außer acht, so erscheint es hiernach plausibel, daß ein fester Körper, in Bewegung gesetzt, sich der Bewegungsrichtung parallel im Verhältnis $\varkappa$ kontrahiert. Allerdings dürfen wir uns nicht verhehlen, daß wir noch weit davon entfernt sind, die Molekularkräfte in

ruhenden Körpern auf Grund der elektrischen Auffassung in befriedigender Weise deuten zu können.

Akzeptiert man jene elektrische Deutung der Molekularkräfte, so ist eine mechanische Regulierung der Stellung von Zahnrädern oder rotierenden Spiegeln zum Zwecke der Messung der Lichtzeit (§ 42) als elektromagnetische Regulierung anzusehen; es erscheint alsdann ausgeschlossen, daß die Translationsbewegung der Erde auf die Lichtzeit, die Abmessungen fester Körper oder auf Interferenzversuche nach Art des Michelsonschen irgendwelchen Einfluß beliebiger Ordnung besitzt, der sich einem irdischen Beobachter kundgeben könnte. Dieses folgt aus den bisherigen Erörterungen, soweit nur die Lichtfortpflanzung im leeren Raume in Betracht kommt.

§ 44. Die Lorentzsche und die Cohnsche Optik bewegter Körper.

Läßt die Elektronentheorie ein negatives Ergebnis des Michelsonschen Interferenzversuches auch dann erwarten, wenn die Lichtfortpflanzung nicht im leeren Raume, sondern in einem beliebigen dielektrischen Körper geschieht? Von dieser Frage ausgehend, hat H. A. Lorentz in zwei neueren Arbeiten[1]) seine Untersuchungen auf gleichförmig bewegte Systeme ausgedehnt, deren Geschwindigkeit zwar kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, aber nicht klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. Er hat Hypothesen über die Eigenschaften der Elektronen und Moleküle aufgestellt, welche, kombiniert mit der Kontraktionshypothese, geeignet sind, von allen negativen Versuchsergebnissen über den Einfluß der Erdbewegung auf die elektrischen und optischen Erscheinungen Rechenschaft zu geben.

Er nimmt an, daß die Verschiebungen der Polarisationselektronen aus ihrer Gleichgewichtslage, welche die Lichtfortpflanzung in durchsichtigen Körpern begleiten, infolge der

1) H. A. Lorentz. Acad. van Wetensch. de Amsterdam 7, S. 507, 1899, und 12, S. 986, 1904.

Bewegung der Körper in derselben Weise abgeändert werden, wie die nach entsprechenden materiellen Punkten gezogenen Fahrstrahlen (vgl. 239) der Kontraktionshypothese gemäß sich ändern. Da die elektrische Polarisation $\mathfrak{P}$ auf die Volumeinheit berechnet ist, so würde

(241) $$\mathfrak{P} = (1, \varkappa^{-1}, \varkappa^{-1})\,\mathfrak{P}_0$$

den Zusammenhang angeben, in welchem die Polarisationen an entsprechenden Punkten des ruhenden Systemes Σ_0 und des bewegten Systemes Σ' stehen. Dabei sind die relativen Geschwindigkeiten der Elektronen gegen die Materie, die in Σ' bzw. in Σ_0 stattfinden, auszudrücken durch

$$\mathfrak{v}' = \frac{\partial' \mathfrak{r}'}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{v}_0 = \frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial t_0};$$

dieselben sind demnach, mit Rücksicht auf (238) und (239), verknüpft durch

(241a) $$\mathfrak{v}' = (\varkappa^2, \varkappa, \varkappa)\,\mathfrak{v}_0.$$

Die Beschleunigungen der Elektronen in entsprechenden Punkten von Σ' und Σ_0 sind mithin aufeinander bezogen durch

(241b) $$\dot{\mathfrak{v}} = (\varkappa^3, \varkappa^2, \varkappa^2)\,\dot{\mathfrak{v}}_0.$$

Die Grundgleichungen (Ic bis IVc, S. 324) gelten nach der Elektronentheorie für beliebig rasch bewegte unmagnetisierbare Körper. Nimmt man die Definitionsgleichungen (195) und (195a) von $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ hinzu und setzt:

$$4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}; \quad \mathfrak{i} = 0,$$

so gelangt man zu einem für durchsichtige, unmagnetisierbare Körper gültigen Gleichungssysteme, in welchem die wahren Koordinaten und die allgemeine Zeit t die unabhängigen Veränderlichen sind. Führt man nun statt dieser die Koordinaten $x_0\, y_0\, z_0$ des Hilfssystemes Σ_0 ein und gleichzeitig die Ortszeit t_0, die durch (238) definiert ist, so gelangt man für gleichförmig bewegte Systeme zu einer neuen Form der Grundgleichungen. H. A. Lorentz hat nun gezeigt, daß man dieselbe auf die Form

der Grundgleichungen für ruhende Körper reduzieren kann, wenn man statt $\mathfrak{P}$ den durch (241) definierten Vektor $\mathfrak{P}_0$ und gleichzeitig durch

$$\mathfrak{E}' = (1, \varkappa, \varkappa)\,\mathfrak{E}_0, \tag{242}$$

$$\mathfrak{H}' = (1, \varkappa, \varkappa)\,\mathfrak{H}_0 \tag{243}$$

zwei neue Vektoren $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ einführt. Kennt man für das ruhende Hilfssystem Σ_0 den Verlauf eines elektromagnetischen Vorganges und der mit ihm verbundenen Elektronenbewegung, so geben (242) und (243) die Werte der elektromagnetischen Vektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ in dem bewegten Systeme Σ' an, welche sich der durch (241a, b) dargestellten Elektronenbewegung zuordnen. Durch

$$\mathfrak{S}' = (\varkappa^2, \varkappa, \varkappa)\,\mathfrak{S}_0 \tag{244}$$

ist dann der relative Strahl in Σ' (vgl. 213b, S. 341) dem absoluten Strahle des ruhenden Hilfssystemes Σ_0 zugeordnet.

Dieser Satz von H. A. Lorentz, auf dessen Beweis wir hier verzichten, beruht allein auf den allgemeinen Grundhypothesen der Elektronentheorie, welche in den Grundgleichungen (I bis V) ihren Ausdruck finden. Er gestattet es, die Lösung eines Problemes der Optik des gleichförmig bewegten Systemes Σ' zurückzuführen auf die Lösung des entsprechenden Problemes für das ruhende System Σ_0. Diese Zurückführung ist auch dann möglich, wenn man die besonderen Hypothesen von H. A. Lorentz fallen läßt. Gibt man die Kontraktionshypothese auf, so ist das ruhende Hilfssystem Σ_0 eben nicht mehr dasjenige, in welches der bewegte Körper, zur Ruhe gebracht, übergehen würde. Gibt man die Lorentzsche Hypothese betreffs der Bewegung der Elektronen auf, so sind $\mathfrak{v}_0$ und $\dot{\mathfrak{v}}_0$ nicht mehr die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, welche die Elektronen in dem bewegten Körper, wenn er zur Ruhe gebracht wäre, bei dem betreffenden Strahlungsvorgange wirklich annehmen würden. Alsdann wird eben ein Einfluß der Bewegung auf die Erscheinungen im Prinzip nicht ausgeschlossen sein. Die Kontraktionshypothese besagt nun gerade, daß das bewegte System, zur Ruhe ge-

bracht, von selbst in Σ_0 übergeht. Die Lorentzsche Hypothese über die Bewegung der Elektronen besagt ferner, daß $\mathfrak{v}_0$ und $\dot{\mathfrak{v}}_0$ gerade diejenigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind, welche die Elektronen bei dem betreffenden Strahlungsvorgange in dem zur Ruhe gebrachten Körper besitzen würden. Für die relative Strahlung durch entsprechende Flächenelemente in Σ_0 und Σ' folgt aus (239) und (244) alsdann

$$\mathfrak{S}'_\nu df = \varkappa^2 \mathfrak{S}_{0\nu} df_0. \tag{244a}$$

Nach H. A. Lorentz ist die relative Strahlung, welche zur Ortszeit t_0 auf ein gegebenes Flächenelement von Σ' fällt, nur durch den Faktor $\varkappa^2$ von der absoluten Strahlung verschieden, welche zur allgemeinen Zeit t_0 auf das entsprechende Flächenelement in Σ_0 fällt. Hierdurch ist ausgesprochen, daß nach den Lorentzschen Hypothesen ein Einfluß der Erdbewegung auf die Richtung des relativen Strahles, sowie auf Interferenzerscheinungen auch bei Verwendung lichtbrechender Körper ausgeschlossen ist. Auch eine Doppelbrechung der Körper infolge der Erdbewegung kann dann nicht stattfinden, so daß das negative Ergebnis der auf die Entdeckung einer Doppelbrechung der Ordnung β^2 hinzielenden Versuche von Rayleigh[1]) und Brace[2]) mit dem Lorentzschen Hypothesensystem vereinbar ist. Die Verringerung der Intensität der relativen Strahlung, welche durch (244a) angezeigt wird, würde sich völlig der Beobachtung entziehen.

Wir wollen die Lorentzschen Sätze zu einem Probleme der Optik bewegter Körper in Beziehung bringen, welches wir gelöst haben (§ 14), nämlich dem Probleme des bewegten leuchtenden Punktes. Wir haben dort hauptsächlich die absolute Strahlung zum Gegenstand der Betrachtungen gemacht, welche sowohl für die ausgestrahlte Energie, wie für die ausgestrahlte Bewegungsgröße maßgebend ist. Wir wollen jetzt einige Bemerkungen über die relative Strahlung und über den

1) Rayleigh. Phil. Mag. 4, S. 678, 1902.

2) D. B. Brace. Phil. Mag. 7, S. 317, 1904.

Lichtdruck anknüpfen, welche ein mit der Lichtquelle mitbewegter Beobachter wahrnehmen würde.

Wir betrachten die Strahlung, welche der mit der Erde bewegte leuchtende Punkt seiner Bewegungsrichtung parallel entsendet; für diese kommen nur die transversalen Schwingungen des emittierenden Elektrons in Betracht, so daß die Strahlung proportional dem Ausdruck (79) auf S. 112 ist; setzen wir φ, den Winkel zwischen Strahlrichtung und Bewegungsrichtung des Dipols, gleich null, und beachten, daß r der Abstand des Aufpunktes von der Lage des leuchtenden Punktes zur Zeit des Entsendens ist, während der Abstand von der gleichzeitigen Lage des leuchtenden Punktes nach (233) ist

$$r' = r\,(1-\beta),$$

so finden wir als Verhältnis der absoluten Strahlungen im bewegten und im ruhenden Systeme

$$\mathfrak{S}_x : \mathfrak{S}_{0x} = \frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{r'^2 (1-\beta)^2} : \frac{\dot{\mathfrak{v}}_0^{\,2}}{r_0^{\,2}}.$$

Nach (239) und (241b) ist die parallel der x-Achse gemessene Entfernung r' in Σ' im Verhältnis $\varkappa$ kleiner als diejenige in dem ruhenden Hilfssysteme Σ_0, während die transversale Beschleunigung des schwingenden Elektrons im Verhältnis $\varkappa^2$ größer ist. Demnach wird

$$\mathfrak{S}_x = \mathfrak{S}_{0x} \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta}. \tag{245}$$

Die absolute Strahlung der Lichtquelle erfährt durch die Bewegung der Lichtquelle Änderungen erster Ordnung in β.

Durch den absoluten Strahl $\mathfrak{S}$ ist die Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße bestimmt und somit der Lichtdruck auf eine ruhende schwarze Fläche. Der Druck auf eine mitbewegte, senkrecht zur Bewegungsrichtung gestellte schwarze Fläche ist

$$p' = \mathfrak{S}_x \cdot \frac{c'}{c^2} = \mathfrak{S}_x \cdot \frac{1-\beta}{c}.$$

Aus (245) folgt daher

$$p' = p_0 \cdot (1 + \beta). \tag{245a}$$

Der Strahlungsdruck auf mitbewegte schwarze Flächen erfährt Änderungen erster Ordnung infolge der Erdbewegung; der Druck muß größer sein, wenn die Strahlung parallel, als wenn sie entgegen der Bewegungsrichtung der Erde sich fortpflanzt. Bei der Schwierigkeit, welche die Beobachtung des Lichtdruckes bietet, dürfte es indessen kaum möglich sein, diese geringfügige Änderung festzustellen.

Ist es dagegen eine spiegelnde Fläche, welche vor dem auffallenden Lichte zurückweicht, so ist nach (Gl. 208, S. 335), nach Umkehrung des Vorzeichens von β, zu setzen

$$p' = \frac{2\mathfrak{S}_x}{c} \cdot \frac{1-\beta}{1+\beta}.$$

Aus (245) folgt mithin

$$p' = p_0. \tag{245b}$$

Der Strahlungsdruck auf mitbewegte Spiegel erfährt keine Änderung infolge der Erdbewegung.

Die relative Strahlung irdischer Lichtquellen, welche bolometrisch durch schwarze Flächen zu messen ist, ergibt sich aus (211a, S. 338)

$$\mathfrak{S}_x' = \mathfrak{S}_x \cdot \frac{c'^2}{c^2} = \mathfrak{S}_x \cdot (1-\beta)^2.$$

Aus (245) folgt somit

$$\mathfrak{S}_x' = \varkappa^2 \mathfrak{S}_{0x}. \tag{245c}$$

Diese mit (244) übereinstimmende Beziehung besagt: Die von der Strahlung irdischer Lichtquellen herrührende Wärmeentwickelung in zwei senkrecht zur Richtung der Erdbewegung gestellten schwarzen Flächen ist die gleiche, sei es, daß die Strahlung parallel oder entgegen der Bewegungsrichtung der Erde sich fortgepflanzt hat.

Wir wollen endlich die relative Gesamtstrahlung des bewegten leuchtenden Punktes ermitteln, d. h. die gesamte Wärmeentwickelung in einer mitbewegten, den leuchtenden Punkt einhüllenden schwarzen Fläche. Nimmt man das Mittel über eine Schwingung, so muß im stationären Schwingungszustande die von der Lichtquelle entsandte elektromagnetische Energie der auf die mitbewegte Fläche fallenden gleich sein und die entsandte Bewegungsgröße der auffallenden. Es gibt also der Ausdruck (82) auf S. 118 den relativen Energiestrom durch die bewegte Fläche an. Der im Verhältnis $\frac{\beta}{c}$ kleinere Ausdruck (83) stellt die resultierende Kraft dar, welche die Strahlung auf die auffangende Fläche ausübt; dies ist die Gegenkraft, welche der Reaktionskraft (83a) der Strahlung auf die Lichtquelle im Sinne des dritten Newtonschen Axiomes entspricht. Im stationären Zustande gilt dieses Axiom, da die elektromagnetische Bewegungsgröße des von der schwarzen Fläche umschlossenen Feldes im Mittel konstant ist; es wird mithin derjenige Teil der ausgestrahlten Energie, welcher mechanischer Arbeit entstammt, wieder in mechanische Arbeit zurückverwandelt. Zieht man diesen Bruchteil β^2 vom relativen Energiestrom ab, so erhält man die relative Gesamtstrahlung, welche die Wärmeentwickelung in der schwarzen Fläche angibt. Es wird also derjenige Teil der emittierten Energie, welcher der thermischen und chemischen Energie der Lichtquelle entstammt, an der auffangenden schwarzen Fläche in Wärme verwandelt. Dies ist der Bruchteil $\varkappa^2$ der entsandten Energie (vgl. 83c). Wir erhalten schließlich für die relative Gesamtstrahlung

$$\int \mathfrak{S}'_{\nu}\, d f' = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left\{ \frac{\dot{\mathfrak{v}}_x^2}{\varkappa^4} + \frac{\dot{\mathfrak{v}}_y^2 + \dot{\mathfrak{v}}_z^2}{\varkappa^2} \right\}.$$

Nach (241b) wird dies

$$(246) \qquad \int \mathfrak{S}'_{\nu}\, d f' = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \varkappa^2 \dot{\mathfrak{v}}_0^2 = \varkappa^2 \int \mathfrak{S}_{0\nu}\, d f_0,$$

was vollkommen mit (244a) übereinstimmt.

Treffen die Lorentzschen Annahmen über die Kontraktion der Körper und über die Bewegung der Elektronen zu, so

sind $\mathfrak{S}_0$ und p_0 die wirklichen Werte des Strahlvektors und des Lichtdruckes auf der zur Ruhe gebrachten Erde. Es ist dabei zu betonen, daß die Lorentzschen Annahmen nur insofern hypothetisch sind, als sie Größen zweiter und höherer Ordnung in β betreffen. Bis auf Größen erster Ordnung folgen sie aus den allgemeinen Grundgleichungen der Elektronentheorie, falls Änderungen erster Ordnung infolge der Erdbewegung in den Abmessungen der Körper, den Massen der Elektronen und den quasielastischen Kräften, welche sie in die Gleichgewichtslage ziehen, ausgeschlossen sind.

Sollen die Lorentzschen Hypothesen über die Bewegung der Elektronen auch in betreff der Größen zweiter und höherer Ordnung der Wirklichkeit entsprechen, so müssen die quasielastischen Kräfte und die Trägheitskräfte der Elektronen gewissen Bedingungen genügen. Um diese Bedingungen abzuleiten, denken wir uns zunächst einen Körper, welcher keine erhebliche Dispersion zeigt. Hier ist die Lichtfortpflanzung durch die quasielastischen Kräfte allein bestimmt, indem die Verschiebung der Elektronen dem Gleichgewichte der quasielastischen Kraft und der äußeren elektrischen Kraft entspricht. Die Verschiebung der Elektronen aus der Gleichgewichtslage wird für den bewegten Körper gerade dann die von Lorentz angenommene sein, wenn die quasielastischen Kräfte infolge der Erdbewegung die gleiche Änderung erfahren wie die elektrischen Kräfte gemäß Gl. 242. Man kann diese Hypothese in derselben Weise plausibel machen wie die entsprechende Hypothese über die Änderung der Molekularkräfte, indem man nämlich die quasielastischen Kräfte in ruhenden Körpern als elektrostatische Kräfte deutet.

Diese Annahme über die quasielastischen Kräfte reicht indessen nur dann aus, wenn bei der Lichtbrechung die Trägheit der Elektronen nicht ins Spiel kommt. Nach der Elektronentheorie ist gerade die Trägheit der Elektronen für die Dispersion maßgebend (vgl. § 29). Handelt es sich um die Lichtfortpflanzung in einem dispergierenden Körper, so hat die Lorentzsche Annahme über die Bewegung der Elektronen

gewisse Konsequenzen hinsichtlich der longitudinalen und der transversalen Masse im Gefolge. Es müssen nämlich, wenn anders die Schwingungsgleichung der Elektronen erfüllt sein soll, die Trägheitskräfte in derselben Weise durch die Erdbewegung beeinflußt werden wie die äußeren elektrischen Kräfte und die quasielastischen Kräfte, d. h. in der durch (242) angegebenen Weise. Sollen gleichzeitig die Beschleunigungen der Elektronen in dem bewegten Systeme Σ' und in dem ruhenden Σ_0 in dem durch (241b) angegebenen Zusammenhange stehen, so muß für die Masse als Quotient von Kraft und Beschleunigung die Beziehung gelten

$$m = (\varkappa^{-3}, \varkappa^{-1}, \varkappa^{-1})\, m_0. \tag{247}$$

Diese Beziehung drückt in der hier benutzten Symbolik dasselbe aus wie die Gleichungen (125) und (125a) auf S. 203, die für die elektromagnetische Masse des Lorentzschen Elektrons gelten. In der Tat hat H. A. Lorentz jene Annahme über die Form des Elektrons gerade im Hinblick auf die Optik bewegter Körper gemacht. Infolge der Erdbewegung sollen die Elektronen, deren Schwingungen die Geschwindigkeit der Lichtfortpflanzung in den Körpern bestimmen, sich in der gleichen Weise kontrahieren wie die materiellen Körper. Im Ruhezustande Kugeln, sollen sie infolge der Bewegung Heaviside-Ellipsoide werden. Diese Hypothese über die Gestaltsänderung der Elektronen, im Verein mit den übrigen Lorentzschen Hypothesen, verbürgt das Fehlen eines bemerkbaren Einflusses der Erdbewegung auf die Lichtfortpflanzung in festen Körpern. Für flüssige und gasförmige Körper fügt Lorentz noch die Hypothese hinzu, daß die Massen der Moleküle in derselben Weise durch die Erdbewegung abgeändert werden, wie die elektromagnetischen Massen der Elektronen. Alle diese Hypothesen setzen die Durchführbarkeit der elektromagnetischen Weltanschauung voraus.

Wir haben in § 22 auf die Bedenken aufmerksam gemacht, welche der Lorentzschen Hypothese des deformierbaren Elektrons gerade vom Standpunkte des elektromagnetischen Welt-

bildes aus erwachsen. Von diesem Standpunkte aus mußten wir dem starren Elektron den Vorzug geben. Die Formeln, die wir für dessen elektromagnetische Massen aufgestellt haben (S. 193, Gl. 118b, c), weichen, was Größen der Ordnung β^2 anbelangt, von den Lorentzschen durch die Faktoren $\left(1 - \frac{3}{10}\beta^2\right)$ bzw. $\left(1 - \frac{1}{10}\beta^2\right)$ ab. Demnach würden sich für die Eigenschwingungen der Elektronen auf der bewegten Erde andere Werte ergeben, wenn man unsere Formeln an Stelle der Lorentzschen setzte und die Hypothese über die quasielastischen Kräfte beibehielte; die Quadrate der Wellenlängen der Eigenschwingungen würden dann in demselben Verhältnisse sich ändern, wie die Werte der Massen. Es würde also die Dauer der longitudinalen und der transversalen Eigenschwingungen der Elektronen infolge der Erdbewegung um Größen der Ordnung $\frac{1}{10}\beta^2 = 10^{-9}$ voneinander abweichen. Diese Abweichung sollte sich für dispergierende Körper durch eine Doppelbrechung kundgeben; senkrecht zur Richtung der Erdbewegung sollte sich monochromatisches Licht mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen, je nachdem es parallel oder senkrecht zur Bewegungsrichtung der Erde polarisiert ist. Eine Doppelbrechung der Körper von dieser Ordnung haben Rayleigh und Brace bei den oben erwähnten Versuchen nicht entdecken können, obgleich die Genauigkeit nach den Angaben der Experimentatoren eine hinreichende gewesen wäre.

Das Lorentzsche Hypothesensystem ist, wenn auch vielleicht nicht das einzige, so doch wohl das einfachste, welches jeden bemerkbaren Einfluß der Erdbewegung auf die elektrischen und optischen Eigenschaften der Körper ausschließt. Die Möglichkeit eines solchen auf der Elektronentheorie fußenden Hypothesensystemes zeigt, daß aus dem Fehlen eines solchen Einflusses kein prinzipieller Einwand gegen die Grundhypothesen der Elektronentheorie hergeleitet werden kann. Diese allgemeinen Grundhypothesen lassen sich vielmehr mit speziellen Annahmen über die Elektronen und Moleküle derart vereinigen, daß die elektromagnetischen Vorgänge auf der be-

wegten Erde merklich mit denjenigen identisch sind, die auf der ruhenden Erde beobachtet werden würden.

Auch wenn man sich auf den Standpunkt der allgemeinen Elektronentheorie stellt, so braucht man doch keineswegs jede einzelne der speziellen Hypothesen von H. A. Lorentz zu akzeptieren. Durfte doch das elektromagnetische Weltbild, dem diese Hypothesen angepaßt sind, nur als ein Programm bezeichnet werden. Und gerade die Lorentzsche Annahme über die Form des Elektrons ist keineswegs mit diesem Programm in Einklang zu bringen. Was ferner die „quasielastischen Kräfte“ anbelangt, welche im Verein mit der Trägheit die Eigenschwingungen der Elektronen bestimmen sollen, so ist deren Natur uns gänzlich unbekannt. Erst wenn wir die Linienspektra eines ruhenden Körpers auf Grund der Elektronentheorie befriedigend werden deuten können, wird es möglich sein, die Optik bewegter Körper sicher zu begründen. Bis dahin sind alle theoretischen Ansätze, welche man der Diskussion des Einflusses der Erdbewegung zugrunde legt, nur von provisorischer Bedeutung und der Abänderung sehr wohl fähig.

In Anbetracht der zahlreichen und vielfach bedenklichen Hypothesen, zu welchen die Lorentzsche Elektrodynamik bewegter Körper ihre Zuflucht nimmt, verdient die von E. Cohn[1]) aufgestellte Elektrodynamik bewegter Körper Interesse. Diese Theorie sieht von atomistischen Vorstellungen ab. Sie stellt, der rein phänomenologischen Methode getreu, ein System von Feldgleichungen an die Spitze:

$$\text{(248)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H}' = \frac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \frac{\partial' \mathfrak{D}}{\partial t}\right\},$$

$$\text{(248a)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial' \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\text{(248b)} \qquad 4\pi\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}' - \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}'],$$

1) E. Cohn. Göttinger Nachrichten 1901, Heft 1. Ann. d. Phys. 7, S. 29, 1902. Berliner Sitzungsber. 1904, S. 1294 und 1404.

(248c) $$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}' \; \{\text{bei fehlenden eingeprägten Kräften}\},$$

(248d) $$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}' + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{E}'].$$

Wie man sieht, ist hier die Hertz-Heavisidesche Analogie der elektrischen und magnetischen Größen gewahrt, welche die Elektronentheorie aufgibt. Für unmagnetisierbare Körper lehrt der Vergleich mit den Grundgleichungen der Lorentzschen Elektrodynamik (S. 324) folgendes: die Abweichung besteht nur darin, daß nicht wie dort die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, sondern $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ zu Vektorprodukten mit $\mathfrak{w}$ vereinigt sind. Diese Abweichung ist von der zweiten Ordnung; hinsichtlich der Größen erster Ordnung in β sind die Cohnschen Grundgleichungen den Lorentzschen völlig äquivalent.

Was die Anwendung auf ein gleichförmig bewegtes System Σ' anbelangt, so ergibt sich, daß ähnlich wie bei Lorentz die Zurückführung der Grundgleichungen auf diejenigen eines ruhenden Systemes Σ_0 möglich ist, wenn die allgemeine Zeit durch eine Ortszeit ersetzt wird. Dabei ist es aber, um das Fehlen eines Einflusses der Erdbewegung zu erklären, nicht notwendig, eine Kontraktion der Körper anzunehmen; es sind vielmehr die Abmessungen des ruhenden Systemes Σ_0 mit denen des bewegten Systemes Σ' identisch. Die im bewegten Systeme gemessenen Längen sind hier die wahren Längen; auch ist die Zeiteinheit beim Übergang zum ruhenden System nicht abzuändern. Es wird also hier ohne hypothetische Annahmen über den Einfluß der Erdbewegung auf die Körper dasselbe erzielt, was Lorentz durch sein Hypothesensystem erreicht.

Die in § 43 gegebene Theorie des Michelsonschen Versuches war von den Feldgleichungen insofern unabhängig, als ihr Gegenstand nur die Lichtfortpflanzung im luftleeren Raume war. Hier würde die Cohnsche Theorie, welche die Kontraktionshypothese fallen läßt, ein positives Ergebnis des Versuches erwarten lassen. Nach Cohn soll das negative Ergebnis daher rühren, daß die Fortpflanzung bei den wirklichen Versuchen in Luft geschah; man dürfte also nach dieser Auf-

fassung die Gleichungen für den leeren Raum hier nicht anwenden, sondern eben die Feldgleichungen, welche für die mit der Erde bewegte Luft gelten sollen.

Handelt es sich nur um den Einfluß sichtbarer Bewegungen auf die elektromagnetischen Vorgänge in wägbaren Körpern, so kann man im Zweifel sein, ob die Lorentzsche oder die Cohnsche Theorie den Vorzug verdient. Eine umfassende Behandlung der Konvektions- und Wellenstrahlung ist indessen auf Grund der Cohnschen Gleichungen bisher nicht durchgeführt worden. Die Theorie von Cohn sieht ab von atomistischen Vorstellungen; für die Ausbildung einer atomistischen Theorie der Elektrizität gibt sie nur die Anweisung: dieselbe so auszubilden, daß für die meßbaren Mittelwerte jene Gleichungen gelten. Sie bleibt den Nachweis schuldig, daß eine solche elektrische Atomistik möglich ist und daß sie die Erfahrungen über Kathodenstrahlen und Radiumstrahlen richtig wiedergibt. Daß die Elektronentheorie dieses leistet, haben wir in dem vorliegenden Bande gezeigt. Wir haben ferner gesehen, daß die Elektronentheorie diese rein elektrischen Strahlungserscheinungen in die engste Verbindung bringt mit gewissen optischen Eigenschaften der Körper, welche in dem Zeemanschen Phänomen, der Dispersion und der magnetischen Drehung der Polarisationsebene sich kundgeben. Eine umfassende elektromagnetische Theorie der Strahlung ist heute nur auf Grund der Elektronentheorie möglich. Jene Verknüpfung der anscheinend verschiedenartigsten Vorgänge ist eine der wichtigsten Errungenschaften der Elektronentheorie. Diese Errungenschaft wird festzuhalten sein, auch dann, wenn etwa der Fortschritt der Wissenschaft die Grundlagen der Elektrizitätstheorie aufs neue erschüttern sollte.

Formelzusammenstellung.

I. Feld und Bewegung einzelner Elektronen.

Grundgleichungen der Elektronentheorie: (§ 4 S. 17)

$$
(\alpha)\quad
\begin{cases}
\text{I)}\ \operatorname{curl}\mathfrak{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = 4\pi\mathfrak{i} = 4\pi\varrho\cdot\dfrac{\mathfrak{v}}{c},\\[2mm]
\text{II)}\ \operatorname{curl}\mathfrak{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = 0,\\[2mm]
\text{III)}\ \operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\varrho,\\[2mm]
\text{IV)}\ \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0,\\[2mm]
\text{V)}\ \mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \dfrac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]
\end{cases}
$$

(elektromagnetische Kraft pro Einheit der Ladung).

Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße:

$$
(\beta)\quad \mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 18 S. 27)}
$$

Lösung der Grundgleichungen:

$$
(\gamma)\quad
\begin{cases}
\mathfrak{H} = \operatorname{curl}\mathfrak{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 28 S. 38)}\\[2mm]
\mathfrak{E} = -\nabla\Phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 29 S. 38)}\\[2mm]
\text{Es sind die elektromagnetischen Potentiale:}\\[2mm]
\Phi = \displaystyle\int_0^\infty \lambda\,d\lambda \int d\omega\,\varrho(\lambda,\ l-\lambda) \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 50 S. 57)}\\[2mm]
\mathfrak{A} = \displaystyle\int_0^\infty \lambda\,d\lambda \int d\omega\,\mathfrak{i}(\lambda,\ l-\lambda). \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 51 S. 57)}
\end{cases}
$$

Dabei ist $l = ct$, λ ist der Latensweg, $\lambda^2 d\omega$ das Flächenelement einer mit dem Radius λ um den Aufpunkt geschlagenen Kugel.

Lösung mit Hilfe des Hertzschen Vektors:

$$(\delta)\quad\begin{cases}\mathfrak{Z} = \int\limits_0^l \lambda d\lambda \int d\omega\, \mathfrak{q}(\lambda, l-\lambda) \quad \dots\dots \quad (\text{Gl. 48 S. 55})\\[2ex] \mathfrak{q} = \int\limits_0^l \mathfrak{k}\, dl \quad \dots\dots \quad (\text{Gl. 47 S. 54})\\[2ex] \left.\begin{aligned}\mathfrak{H} &= \operatorname{curl}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial l}\\ \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 &= \nabla \operatorname{div}\mathfrak{Z} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial l^2}\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (\text{Gl. 48c, d S. 56})\end{cases}$$

$\mathfrak{E}_0$ ist das anfängliche elektrostatische Feld.

Bewegte Punktladung e: $\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit, $\beta = \frac{|\mathfrak{v}|}{c}$, $\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}$, t' Zeit des Entsendens, t Zeit des Eintreffens im Aufpunkte, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$ Fahrstrahl vom Orte des Entsendens zum Aufpunkte bzw. entsprechender Einheitsvektor

$$(\varepsilon)\quad\left\{\begin{aligned}\Phi &= \frac{e}{r\left(1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)} = \frac{e}{r}\frac{\partial t'}{\partial t}\\ \mathfrak{A} &= \frac{e\mathfrak{v}}{rc\left(1-\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right)} = \frac{e\mathfrak{v}}{rc}\frac{\partial t'}{\partial t}\end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (\text{Gl. 63, 64, 65, § 11})$$

$$(\zeta)\quad\left\{\begin{aligned}\mathfrak{E} &= -\frac{e\dot{\mathfrak{v}}}{rc^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + \frac{e}{r^2}\left\{\mathfrak{r}_1 - \frac{\mathfrak{v}}{c}\right\}\left\{1-\beta^2+\frac{(\dot{\mathfrak{v}}\mathfrak{r})}{c^2}\right\}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^3\\ \mathfrak{H} &= [\mathfrak{r}_1\mathfrak{E}] \quad \dots\dots\end{aligned}\right\}$$

(Gl. 72, 73, S. 97)

Ausgestrahlte Energie und Bewegungsgröße:

$$(\eta)\quad\left\{\begin{aligned}W_{12} &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\int\limits_1^2 dt'\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\}\\ \mathfrak{G}_{12} &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\int\limits_1^2 dt'\,\mathfrak{v}\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}^2}{\varkappa^4} + \frac{(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^2\varkappa^6}\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad (\text{Gl. 82, 83, S. 118})$$

Reaktionskraft der Strahlung:

$$(\vartheta)\quad \mathfrak{K}^s = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left\{\frac{\ddot{\mathfrak{v}}}{\varkappa^2} + \frac{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\ddot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4} + \frac{3\dot{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2\varkappa^4} + \frac{3\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})^2}{c^4\varkappa^6}\right\} \quad (\text{Gl. 85, S. 123})$$

Elektromagnetische Massen des Elektrons. Allgemeine Formeln:

$$(\iota)\quad \left\{\begin{array}{ll} m_s = \dfrac{d|\mathfrak{G}|}{d|\mathfrak{v}|} & \text{longitudinale Masse} \\ m_r = \dfrac{|\mathfrak{G}|}{|\mathfrak{v}|} & \text{transversale Masse} \end{array}\right\} \quad \text{(Gl. 115, 115a, S. 186)}$$

Starres kugelförmiges Elektron (m_0 Masse bei langsamer Bewegung):

$$(\varkappa)\quad \left\{\begin{array}{l} m_s = m_0 \cdot \dfrac{3}{4}\chi(\beta), \\ \chi(\beta) = \dfrac{1}{\beta^2}\left\{-\dfrac{1}{\beta} ln\left(\dfrac{1+\beta}{1-\beta}\right) + \dfrac{2}{1-\beta^2}\right\} \quad . \quad \text{(Gl. 117d, S. 192)} \\ m_r = m_0 \cdot \dfrac{3}{4}\psi(\beta), \\ \psi(\beta) = \dfrac{1}{\beta^2}\left\{\left(\dfrac{1+\beta^2}{2\beta}\right) ln\left(\dfrac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\} \quad . \quad \text{(Gl. 117e, S. 192)} \end{array}\right.$$

Lorentzsches Elektron:

$$(\lambda)\quad \left\{\begin{array}{l} m_s = m_0 \cdot \varkappa^{-3} \\ m_r = m_0 \cdot \varkappa^{-1} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 125, 125a, S. 203)}$$

II. Elektromagnetische Vorgänge in wägbaren Körpern.

Grundgleichungen der Lorentzschen Elektrodynamik für bewegte unmagnetisierbare Körper (§§ 35 und 36):

$$(\mu)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{(Ic)} \quad \text{curl}\; \mathfrak{H}' = \dfrac{4\pi}{c}\left\{\mathfrak{i} + \dfrac{\partial'\mathfrak{D}}{\partial t}\right\} \quad . \; . & \text{(Gl. 190, S. 316)} \\ \text{(IIc)} \quad \text{curl}\; \mathfrak{E}' = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial'\mathfrak{H}}{\partial t} \quad . \; . \; . \; . \; . & \text{(Gl. 194, S 320)} \\ \text{(IIIc)} \quad \text{div}\; \mathfrak{D} = \varrho, & \\ \text{(IVc)} \quad \text{div}\; \mathfrak{H} = o. & \\ \quad \mathfrak{i} = \sigma\mathfrak{E}' = \sigma\left\{\mathfrak{E} + \dfrac{1}{c}[\mathfrak{w}\,\mathfrak{H}]\right\} & \text{(Gl. 195 u. 195b, S. 324)} \\ 4\pi\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}' - \dfrac{1}{c}[\mathfrak{w}\,\mathfrak{H}] \quad . \; . \; . \; . \; . & \text{(Gl. 195c, S. 324)} \\ \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + \dfrac{1}{c}[\mathfrak{w}\,\mathfrak{E}] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & \text{(Gl. 195a, S. 324)} \end{array}\right.$$

{$\mathfrak{w}$ ist die Geschwindigkeit der Materie, $\frac{\partial'}{\partial t}$ bezieht sich auf einen mitbewegten Punkt; $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ sind die Mittelwerte der elektromagnetischen Vektoren, welche die im Raume von den Elektronen erregten Felder kennzeichnen; $\mathfrak{E}'$ ist die elektromagnetische Kraft auf die Einheit der mitbewegten Ladung; ε und σ sind Materialkonstanten, die von der Bewegung unabhängig sind, wenn Größen zweiter Ordnung in $\frac{|\mathfrak{w}|}{c}$ nicht in Frage kommen}.

Relativer Strahl:

$$(\nu) \qquad \mathfrak{S}' = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}'] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 213b, S. 341)}$$

Flächenkraft für die Flächeneinheit einer im Raume bewegten Fläche:

$$(\xi) \qquad \mathfrak{T}' = \frac{1}{8\pi}\left\{2\,\mathfrak{E}'\,\mathfrak{E}_\nu + 2\,\mathfrak{H}'\,\mathfrak{H}_\nu - \mathfrak{n}\,\{\mathfrak{E}\mathfrak{E}' + \mathfrak{H}\mathfrak{H}'\}\right\}$$

(Gl. 204, S. 333)

Thermodynamisches Gesetz der Wellenstrahlung:

$$(o) \qquad H = \vartheta^3 \cdot g\left(\frac{\vartheta}{\nu}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 228a, S. 357)}$$

bestimmt die Helligkeit H der Strahlung von der Temperatur ϑ und der Schwingungszahl ν.

Plancksche Formel:

$$(\pi) \qquad H = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 229, S. 361)}$$

{k und h sind universelle Konstanten}.

Register.

Die Beifügung der Paragraphenangabe besagt, daß der ganze Paragraph den betreffenden Gegenstand behandelt.

Berichtigungen zu Band I.

S. 9, Z. 13 v. u. lies: $\frac{d\mathfrak{t}_1}{ds}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ statt $\frac{d\mathfrak{t}_1}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$.

S. 19, Z. 10 v. o. lies: $\alpha_1\mathfrak{i}+\alpha_2\mathfrak{j}+\alpha_3\mathfrak{k}$ statt $\alpha_1\mathfrak{i}+\beta_1\mathfrak{j}+\gamma_1\mathfrak{k}$.

S. 72, Z. 16 v. o. und S. 73, Z. 6 v. o. lies:

$$\int df\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}-\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}\right\} \quad \text{statt} \quad \int df\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}\right\}.$$

S. 111, Z. 2 v. o. lies: Arbeit statt Kraft.

S. 154, Z. 9 v. u. lies: $-\nabla(\varphi-\varphi_0)$ statt $-\nabla\varphi-\varphi_0$.

S. 178, Z. 2 v. u. lies: den statt der.

S. 229, Z. 12 v. o. lies: magnetisierten statt magnetischen.

S. 259, Gl. (183a) lies: $\frac{1}{c}L_{12}J_1$ statt $\frac{1}{c}L_{12}J$.

S. 259, Gl. (183d) lies: $\frac{1}{c}L_{21}J_2$ statt $\frac{1}{c}L_{21}J$.

S. 261, Z. 4 v. u. lies: J_1 statt J.

S. 261, Z. 1 v. u. lies: J_2 statt J.

S. 277, Z. 2 v. o. lies: dt statt df.

S. 288, Z. 7 v. o. lies: der Energieinhalt statt die Energieeinheit.

S. 297, Z. 14 v. o. lies: $(\tau_1^2-\tau_2^2)^2$ statt $(\tau_1^2-\tau_2)^2$.

S. 321, Gl. (209f) lies: $\frac{1}{2}a$ statt a.

S. 342, Gl. (217a) lies: $-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x}$ statt $\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x}$.

S. 353, Gl. (225) lies: $\frac{\nu l}{w}+\gamma=\frac{\pi}{2}+m\pi$.

S. 403, Z. 4 v. o. lies: (242e) statt (242c).

S. 438, Z. 10 v. o., Formel ϱ lies: curl curl $\mathfrak{A}$ statt curl $\mathfrak{A}$.

Berichtigungen zu Band II.

S. 117, Z. 2 v. o. ist 2 als Faktor beizufügen.

S. 153, Z. 3 v. u. lies: $\mathfrak{R}=-\int dv\left[\mathfrak{w},\frac{\partial\mathfrak{g}}{\partial t}\right]$.

S. 154, Z. 40 v. o. lies: $-[\mathfrak{v}_0\mathfrak{G}]-\frac{d\mathfrak{J}}{dt}$ statt $[\mathfrak{v}_0\mathfrak{G}]+\frac{d\mathfrak{J}}{dt}$.

S. 157, Z. 8 v. u. lies: (I) statt (II).

S. 272, Z. 13 v. u. lies: λ statt r.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Kremer, Dr. E., Professor in München, Physikalisches Praktikum für Anfänger. Dargestellt in 25 Arbeiten. Mit 47 Abbildungen im Text. [VIII u. 150 S.] gr. 8. 1903. geb. n. M. 3.60.

Planck, Dr. **Max,** Professor in Berlin, Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Von der philosophischen Fakultät Göttingen preisgekrönt. [XIII u. 247 S.[gr. 8. 1887. geh. n. M. 6.—

Plücker, Julius, Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegeben von A. Schoenflies und Fr. Pockels. In 2 Bänden. I. Band. Mathematische Abhandlungen, herausgegeben von A. Schoenflies. Mit dem Bildnis Plückers und 73 Figuren im Text. [XXXV u. 620 S.] gr. 8. 1895. n. M. 20.— II. Band. Physikalische Abhandlungen, herausgegeben von Fr. Pockels. Mit 78 Figuren im Text und 9 lithogr. Tafeln. [XVIII u. 834 S.] gr. 8. 1896. geh. n. M. 30.—

Pockels, Dr. **Friedrich,** Professor an d. Universität Heidelberg, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit zahlreichen Textabbildungen. gr. 8. [Erscheint im Herbst 1905.]

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut. Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. [XVI u. 342 S.] 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 4.80.

Richarz, Dr. F., Professor an der Universität Marburg, Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. 2. Aufl. Mit 97 Abbild. [VI u. 128 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 1.50.

Scheffer, Dr. W., in Dresden, Das Mikroskop, seine Optik, Geschichte und Anwendung gemein ... ständlich dargestellt. Mit 66 Abbildungen im Text und 1 ... [V u. 114 S.] 8. 1902. geh. n. ℳ 1.—, geb. n. ℳ 1.25.

Starke, Dr. Hermann, Privatdozen ... iversität Berlin, Experimentelle Elektrizitätsleh ... nderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen ... e. Mit 275 Abbildungen im Text. [XIV u. 422 S.] ... geb. n. ℳ 6.—

Steinheil, Dr. Adolf und Dr. ... r in München, Handbuch der angewandten O ... Band. Voraussetzung für die Berechnung opti ... endung auf einfache und chromatische Lins ... t und 7 lithogr. Tafeln. [VI u. 314 S.] ... .—

Thomson, J. J. ... gang in Gasen. Deutsche autor. Aus ... Autors besorgt und ergänzt von Dr. Er ... ipzig. In 3 Lieferungen. I. Lfg. [S. 1 ... ℳ 6.— [Fortsetzung unter der Presse.]

Trab ... in Innsbruck, Lehrbuch der kos- ... [In Vorbereitung.]

... der theoretischen Physik an der Universität ... führung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. [XVI u. 370 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 9.—, in Leinw. geb. n. ℳ 10.20.

——— Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. Unter Rücksicht auf die elastische und die elektromagnetische Anschauung. Mit Figuren im Text. [XVI u. 432 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 11.20.

——— Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. [XII u. 181 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 6.—

Wallentin, Dr. J., Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Textfiguren. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Webster, Arthur Gordon, Ph. D., Professor of Physics, Clark University, Worcester, Mass., The Dynamics of Particles, and of Rigid, Elastic, and Fluid Bodies, being Lectures on Mathematical Physics. [XII u. 588 S.] gr. 8. 1904. Cloth: ℳ 14.—

Weinstein, Geheimer Regierungsrat Dr. **B.,** Professor in Charlottenburg, Philosophische Grundlagen der Naturwissenschaften. gr. 8. 1906. [In Vorbereitung.]

Wien, Dr. W., Professor in Würzburg, über Elektronen. Vortrag. gr. 8. [Erscheint im September 1905.]



